

ГЛАВА 2.

Методический анализ результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень)

РАЗДЕЛ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТНИКОВ ЕГЭ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ

1.1.Количество участников ЕГЭ по учебному предмету (за 3 года)

Таблица 2-1

2023 г.		2024 г.		2025 г.	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
2234	45,86	2034	46,82	2192	49,95

1.2.Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ (за 3 года)

Таблица 2-2

Пол	2023 г.		2024 г.		2025 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Женский	911	40,78	834	41,00	850	38,78
Мужской	1323	59,22	1200	59,00	1342	61,22

1.3. Количество участников экзамена в регионе по категориям (за 3 года)

Таблица 2-3

Категория участника	2023 г.		2024 г.		2025 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Всего участников ЕГЭ по предмету	2234	100	2034	100	2192	100

Выпускник общеобразовательной организации текущего года	2234	100	2026	99,61	2188	99,82
Обучающийся образовательной организации среднего профессионального образования			7	0,34	3	0,14
Выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА)					1	0,05
Обучающийся общеобразовательной организации, завершивший освоение образовательной программы по учебному предмету			1	0,05		
В том числе участников с ограниченными возможностями здоровья	35	1,57	32	1,57	31	1,41

1.4.Количество участников экзамена в регионе по типам ОО

Таблица 2-4

№ п/п	Категория участника	2023 г.		2024 г.		2025 г.	
		чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
1	Всего ВТГ	2234	100	2026	99,61	2188	99,82
2	Гимназия	318	14,23	305	15	296	13,5
3	Лицей	303	13,56	259	12,73	288	13,14
4	Открытая (сменная) общеобразовательная школа	10	0,45	3	0,15	4	0,18
5	Средняя общеобразовательная школа	1488	66,61	1370	67,35	1471	67,11
6	Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов	115	5,15	89	4,38	88	4,01
7	СОШ при университетах					41	1,87

1.5.Количество участников ЕГЭ по учебному предмету по АТЕ региона

Таблица 2-5

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников ЕГЭ по учебному предмету	% от общего числа участников в регионе
1	Воловский район	25	1,14
2	г. Елец	170	7,76
3	г. Липецк	1334	60,86
4	Грязинский район	82	3,74
5	Данковский район	61	2,78
6	Добринский район	29	1,32
7	Добровский район	34	1,55
8	Долгоруковский район	24	1,09
9	Елецкий район	41	1,87
10	Задонский район	19	0,87
11	Измалковский район	7	0,32
12	Краснинский район	8	0,36
13	Лебедянский район	56	2,55
14	Лев-Толстовский район	31	1,41
15	Липецкий район	68	3,10
16	Становлянский район	31	1,41
17	Тербунский район	32	1,46
18	Усманский район	66	3,01
19	Хлевенский район	23	1,05
20	Чаплыгинский район	51	2,33

1.6. Прочие характеристики участников экзаменационной кампании (при наличии)

1.7. ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету

Количество обучающихся, сдававших математику на профильном уровне в 2025 году увеличилось на 3,13% по сравнению с 2024 годом и на 4,09% с 2023 годом. ЕГЭ по профильной математике сдавало 49,95% выпускников 2025 года. Выбор одного из вариантов сдачи экзамена по математике – на профильном или базовом уровне – связан с дальнейшей профессиональной траекторией школьников. В связи с тем, что для достижения технологического лидерства очень нужны высококвалифицированные инженерные кадры, сейчас пристальное внимание направлено на улучшение качества математического и естественнонаучного образования. Проводится много научно-популярных и профориентационных мероприятий, поэтому возрастает количество выпускников, планирующих поступать на технические, инженерные, экономические, IT направления. Им требуется сдавать ЕГЭ по профильной математике. Остальные предпочитают сдавать базовую математику. С выбором дальнейшей профессии связана и гендерная составляющая участников ЕГЭ – девушек, сдающих математику на профильном уровне на 22,44% меньше, чем юношей. Причем эта разница увеличилась по сравнению с прошлым годом на 4,44%, что означает, что часть девушек переориентирована на получение образования по направлениям, отличным от технических.

В анализе количественного состава участников ЕГЭ этого года появилось две новые категории участников: выпускники общеобразовательной организации, не завершившие среднее общее образование (не прошедшие ГИА) и обучающиеся общеобразовательной организации, завершившие освоение образовательной программы по учебному предмету. Однако их число весьма незначительно и не влияет в дальнейшем на анализ результатов ЕГЭ.

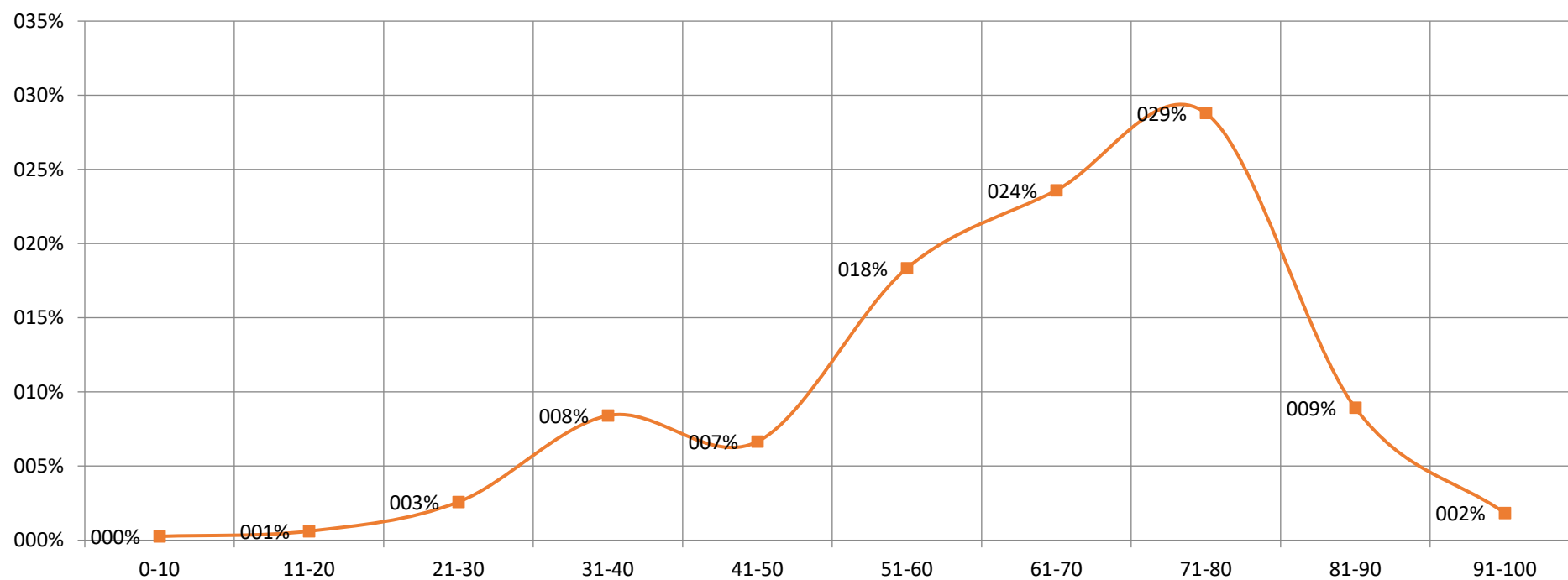
Сравнивая количество участников экзамена в регионе по типам ОО можно отметить, что количество сдающих математику на профильном уровне в процентном соотношении практически не меняется. Весьма незначительно уменьшается процент выпускников гимназий и СОШ с УИОП, выбирающих профильную математику. Выпускники СПО в этом году составили всего 0,14% от общего количества выпускников, что связано с их возможностью поступать в высшие учебные заведения по внутренним экзаменам, а тем, кто решил завершить обучение, ЕГЭ не нужен. Появилась также новая категория участников – СОШ при университетах, но их количество составляет менее 2%. В силу демографической ситуации в регионе больше половины участников экзамена – выпускники школ г. Липецка.

Неизменное процентное соотношение выпускников, выбирающих сдачу ЕГЭ по профильной математике свидетельствует о целенаправленной подготовке этой категории обучающихся к сдаче ЕГЭ. Указанное постоянство свидетельствует также о том, что профильную математику сдают в основном только те ребята, которые нацелены на обучение по соответствующим направлениям в вузе, остальные выпускники для получения аттестата сдают базовую математику. Если не будут вноситься коррективы в перечень экзаменов, которые необходимы для поступления в высшие учебные заведения на те или иные направления, скорее всего процентная составляющая сдающих профильную математику сохранится и в дальнейшем.

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГЭ ПО ПРЕДМЕТУ

2.1. Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2025 г. (количество участников, получивших тот или иной тестовый балл)

Математика (профильная)



2.2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Таблица 2-6

№ п/п	Участников, набравших балл	Год проведения ГИА		
		2023 г.	2024 г.	2025 г.
1.	ниже минимального балла ¹ , %	7,88	4,28	3,83
2.	от минимального балла до 60 баллов, %	40,82	30,04	34,22
3.	от 61 до 80 баллов, %	46,96	47,64	51,78
4.	от 81 до 100 баллов, %	4,34	18,04	10,17
5.	Средний тестовый балл	55,79	64,65	62,88

2.3. Результаты ЕГЭ по учебному предмету по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки

2.3.1. в разрезе категорий участников ЕГЭ

Таблица 2-7

№ п/п	Категории участников	Доля участников, у которых полученный тестовый балл			
		ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1	ВТГ, обучающиеся по программам СОО	3,84	34,1	51,87	10,19
2	ВТГ, обучающиеся по программам СПО	0	100	0	0
3	Выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА)	0	100	0	0
4	Участники ЕГЭ с ограниченными возможностями здоровья	6,45	25,81	58,06	9,68

¹ Здесь и далее: минимальный балл – установленное Рособрнадзором минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования

2.3.2. в разрезе типа ОО

Таблица 2-8

№ п/п	Тип ОО	Количество участников , чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1	Всего ВТГ	2234	100	2026	99,61	2188
2	Гимназия	318	14,23	305	15	296
3	Лицей	303	13,56	259	12,73	288
4	Открытая (сменная) общеобразовательная школа	10	0,45	3	0,15	4
5	Средняя общеобразовательная школа	1488	66,61	1370	67,35	1471
6	Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов	115	5,15	89	4,38	88
7	СОШ при университетах					41

2.3.3. юношей и девушек

Таблица 2-9

№ п/п	Пол	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1.	женский	850	3,53	32,12	54	10,35
2.	мужской	1342	4,02	35,54	50,37	10,06

2.3.4. в сравнении по АТЕ

Таблица 2-10

№ п/п	Наименование АТЕ	Количество участников, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1	Воловский район	25	0	36	64	0
2	г. Елец	170	0	27,06	60,59	12,35
3	г. Липецк	1334	3,75	32,83	52,02	11,39
4	Грязинский район	82	4,88	34,15	57,32	3,66
5	Данковский район	61	1,64	45,9	44,26	8,2
6	Добринский район	29	3,45	24,14	68,97	3,45
7	Добровский район	34	8,82	50	32,35	8,82
8	Долгоруковский район	24	0	37,5	50	12,5
9	Елецкий район	41	7,32	41,46	46,34	4,88
10	Задонский район	19	15,79	47,37	26,32	10,53
11	Измалковский район	7	0	42,86	42,86	14,29
12	Краснинский район	8	0	12,5	87,5	0
13	Лебедянский район	56	5,36	35,71	48,21	10,71
14	Лев-Толстовский район	31	6,45	16,13	67,74	9,68
15	Липецкий район	68	2,94	44,12	45,59	7,35
16	Становлянский район	31	0	51,61	45,16	3,23
17	Тербунский район	32	0	43,75	40,63	15,63
18	Усманский район	66	7,58	33,33	51,52	7,58
19	Хлевенский район	23	30,43	34,78	34,78	0
20	Чаплыгинский район	51	0	45,1	45,1	9,8

2.4.Выделение перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие и низкие результаты ЕГЭ по предмету

2.4.1. Перечень ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

Таблица 2-11

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			от 81 до 100 баллов	от 61 до 80 баллов	от минимального балла до 60 баллов	ниже минимального
1	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Гимназия № 64 имени В.А. Котельникова" города Липецка	35	48,57	42,86	8,57	0
2	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Лицей №5 города Ельца"	37	27,03	62,16	10,81	0
3	Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя школа №51 г. Липецка	24	25	66,67	8,33	0
4	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Гимназия № 11 города Ельца"	25	24	48	28	0
5	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 9 г. Грязи Грязинского муниципального района Липецкой области	10	20	70	10	0
6	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение гимназия №19 им. Н.З. Поповичевой г.Липецка	26	19,23	57,69	23,08	0
7	Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя школа с углубленным изучением отдельных предметов №55 города Липецка "Лингвист"	16	18,75	43,75	37,5	0
8	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов с.Тербуны Тербунского муниципального района Липецкой области	22	18,18	50	31,82	0

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			от 81 до 100 баллов	от 61 до 80 баллов	от минимального балла до 60 баллов	ниже минимального
9	Частное общеобразовательное учреждение "Школа "Интеграл" г.Липецка	17	17,65	64,71	17,65	0
10	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей №4 г.Данкова Липецкой области	12	16,67	50	33,33	0
11	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Гимназия №97 г.Ельца"	12	16,67	58,33	25	0
12	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №77 г.Липецка	32	15,63	53,13	31,25	0
13	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»	21	14,29	42,86	42,86	0
14	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №2 города Чаплыгина Чаплыгинского муниципального района Липецкой области	22	13,64	50	36,36	0
15	Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение гимназия № 69 имени С. Есенина г. Липецка	31	12,9	70,97	16,13	0
16	муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей с.Долгоруково	18	11,11	61,11	27,78	0
17	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 города Лебедянь Лебедянского муниципального района Липецкой области	19	10,53	57,89	31,58	0
18	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Средняя школа №10 с углубленным изучением отдельных предметов"	20	10	50	40	0

2.4.2. Перечень ОО, продемонстрировавших низкие результаты ЕГЭ по предмету

Таблица 2-12

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
1	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение "Лицей села Хлевное"	21	33,33	38,1	28,57	0
2	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 г. Усмани Липецкой области	12	25	25	50	0
3	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №10 имени Героя России И.Свиридова г.Липецка	11	18,18	54,55	27,27	0
4	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа села Талица им. вице-адмирала С.А. Бутова Елецкого муниципального района Липецкой области	17	17,65	52,94	23,53	5,88
5	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №45 г.Липецка имени Героя Советского Союза Павла Андреевича Папина	12	16,67	8,33	75	0
6	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Липецкий государственный технический университет»	20	15	30	45	10
7	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №62 г.Липецка	14	14,29	21,43	64,29	0
8	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №5 города Липецка имени Героя Советского Союза С.Г.Литаврина	16	12,5	56,25	31,25	0
9	Муниципальное бюджетное образовательное учреждение "Школа № 6" города Липецка имени В. Шавкова	24	12,5	29,17	58,33	0

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
10	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение " Средняя многопрофильная школа естественно-математических дисциплин №65 "Спектр"" г.Липецка	17	11,76	52,94	35,29	0
11	Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя школа №15 г.Липецка	10	10	70	10	10
12	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №46 г.Липецка	11	9,09	54,55	27,27	9,09
13	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №49 г.Липецка	11	9,09	36,36	54,55	0
14	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа № 31 им. В.Я. Клименкова г.Липецка	11	9,09	36,36	54,55	0
15	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №41 имени М. Ю. Лермонтова города Липецка	23	8,7	30,43	52,17	8,7
16	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя школа №28 имени А.Смылова г.Липецка	12	8,33	50	41,67	0
17	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение им.Л.Н.Толстого	31	6,45	16,13	67,74	9,68
18	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №47 г.Липецка с углубленным изучением отдельных предметов	16	6,25	43,75	43,75	6,25
19	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №7 г.Липецка	19	5,26	42,11	52,63	0

№ п/п	Наименование ОО	Количество ВТГ, чел.	Доля ВТГ, получивших тестовый балл			
			ниже минимального	от минимального балла до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов
20	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение гимназия №12 города Липецка "Гармония"	42	4,76	40,48	45,24	9,52
21	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Многопрофильный лицей города Липецка	23	4,35	26,09	60,87	8,7
22	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей № 6 г. Данкова Липецкой области	31	3,23	48,39	38,71	9,68

2.5. ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по предмету

Минимальное количество баллов единого государственного экзамена по математике, подтверждающее освоение выпускником основных общеобразовательных программ среднего общего образования, в 2025 году равнялось 27 (5 первичных баллов).

Средний тестовый балл в 2025 году оказался ниже, чем в 2024 и составил 62,88%. Основная причина такого снижения – усложнение заданий второй части КИМ, по сравнению с прошлым годом. Об этом свидетельствует и резкое снижение, практически в два раза (с 18,04% до 10,17%), процента обучающихся, получивших от 81 до 100 баллов, причем потенциальные участники этой группы в своем большинстве перешли в группу с тестовыми баллами 61-80, а ребята с уровнем подготовки решающих только 13, 15 и 16 задания второй части не смогли этого сделать в 2025 году и попали в группу с тестовыми баллами от минимального до 60. Количество выпускников, не преодолевших минимальный порог незначительно снизилось с 4,28% в 2024 году до 3,83% в 2025.

Сравнительный анализ групп участников в разрезе категорий показал, что уменьшилась доля участников, обучающихся по программам СПО, причем все выпускники 2025 года преодолели пороговое значение, но не получили выше 60 баллов. Такие же результаты показал и единственный выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА) и принимавший участие в ЕГЭ в этом году. Хуже, чем в прошлом году, написали ЕГЭ и участники с ОВЗ – 6,45% не преодолели пороговое значение, и меньше 10% получили баллы от 81 до 100.

Анализ результатов ЕГЭ по профильной математике в сравнении по АТЕ показал, что в 4 из 6 муниципальных образований, в которых не было выпускников, не преодолевших пороговое значение в 2024 году – Воловском, Измалковском, Становлянском и г. Ельце, нет их и в 2025. Всего таких районов в 2025 году – 8. И только в 3 районах нет высокобалльников. Никто из выпускников Воловского, Краснинского и Хлебенского районов не получил выше 80 баллов.

Более того, в большинстве муниципальных образований, за исключением Данковского, Добровского, Задонского, Становлянского и Тербунского районов, количество участников, набравших более 60 баллов, превышает количество участников, набравших от минимального до 60 баллов. Что также подтверждает осознанный выбор профильной математики у выпускников 2025 года.

В этом году 8 школ из 18, показавших наиболее высокие результаты, сделали это во второй раз: МБОУ "Гимназия № 64 имени В.А. Котельникова" города Липецка, МБОУ "Лицей №5 города Ельца", МБОУ "Гимназия № 11 города Ельца", МБОУ гимназия №19 им. Н.З. Поповичевой г.Липецка, ЧОУ "Школа "Интеграл" г.Липецка, МБОУ лицей №4 г.Данкова Липецкой области, МБОУ СОШ №77 г.Липецка, МАОУ гимназия № 69 имени С. Есенина г. Липецка. Состав школ, продемонстрировавших самые низкие результаты, поменялся, лишь одна школа вошла в списки и 2024 и 2025 годов.

Несмотря на уменьшение среднего тестового балла, которое имеет под собой вполне объективную причину, можно сделать вывод о том, что выпускники достаточно серьезно подходят к выбору перечня сдаваемых экзаменов. Уменьшение числа не преодолевших порог свидетельствует о более качественном освоении образовательных программ СОО, в том числе и на углубленном уровне. Очевидно, что экзамен по профильной математике осознанно выбирается выпускниками, которым требуется хороший балл для поступления в вузы.

Раздел 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КИМ²

3.1. Анализ выполнения заданий КИМ

3.1.1. Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2025 году

3.1.1.1. Основные статистические характеристики выполнения заданий КИМ в 2025 году

Основные статистические характеристики выполнения заданий в целом представлены в Таб.2-13. Информация о результатах оценивания выполнения заданий, в том числе в разрезе данных о получении того или иного балла по критерию оценивания выполнения каждого задания КИМ представлена в Таб. 2-14.

Таблица 2-13

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
1	Умение оперировать понятиями: плоский угол, площадь фигуры, подобные фигуры; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	Б	83,03	30,95	68	94,1	96,86

² При формировании отчетов по иностранным языкам рекомендуется выделять отдельные подразделы по устной и по письменной частям экзамена.

³ Вычисляется по формуле $p = \frac{N}{nm} \cdot 100\%$, где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание.

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
2	Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами	Б	96,35	69,05	94,67	98,94	99,1
3	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, величина угла, плоский угол, двугранный угол, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, объем фигуры, площадь поверхности; умение использовать геометрические отношения при решении задач; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	Б	63,59	9,52	40,8	76,92	92,83
4	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность	Б	97,35	84,52	96	98,77	99,55
5	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы	П	71,35	9,52	46,93	87,31	95,52
6	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	Б	93,7	28,57	90	99,74	100

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
7	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений	Б	88,37	13,1	78,93	97,97	99,55
8	Умение оперировать понятиями: функция, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, производная функции, первообразная; находить уравнение касательной к графику функции; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций; находить площади фигур с помощью интеграла	Б	81,48	16,67	64,13	94,27	99,1
9	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	83,03	14,29	68,8	94,71	97,31
10	Умение решать текстовые задачи разных типов, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	78,97	4,76	59,47	93,48	98,65
11	Умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений	П	78,7	4,76	54,53	96,04	99,55

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
12	Умение оперировать понятиями: экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций	П	81,75	14,29	65,47	94,1	99,1
13	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	37,45	0,6	2,07	51,85	97,09
14	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объем фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	П	5,54	0	0,09	2,11	43,35

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
15	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	23,08	0	0,33	26,83	89,24
16	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; умение решать текстовые задачи разных типов, в том числе задачи из области управления личными и семейными финансами	П	17,24	0	0,4	16,08	86,32
17	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	П	4,09	0	0	1,5	32,59
18	Умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	В	1,02	0	0	0,42	7,85

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Липецкой области ³ в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки				
			средний, %	в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
19	Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное; умение выбирать подходящий метод для решения задачи	П	0,54	0	0	0,15	4,48

Таблица 2-14

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Липецкой области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
1	0	69,05	32	5,9	3,14
1	1	30,95	68	94,1	96,86
2	0	30,95	5,33	1,06	0,9
2	1	69,05	94,67	98,94	99,1
3	0	90,48	59,2	23,08	7,17
3	1	9,52	40,8	76,92	92,83
4	0	15,48	4	1,23	0,45

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Липецкой области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
4	1	84,52	96	98,77	99,55
5	0	90,48	53,07	12,69	4,48
5	1	9,52	46,93	87,31	95,52
6	0	71,43	10	0,26	0
6	1	28,57	90	99,74	100
7	0	86,9	21,07	2,03	0,45
7	1	13,1	78,93	97,97	99,55
8	0	83,33	35,87	5,73	0,9
8	1	16,67	64,13	94,27	99,1
9	0	85,71	31,2	5,29	2,69
9	1	14,29	68,8	94,71	97,31
10	0	95,24	40,53	6,52	1,35
10	1	4,76	59,47	93,48	98,65
11	0	95,24	45,47	3,96	0,45
11	1	4,76	54,53	96,04	99,55
12	0	85,71	34,53	5,9	0,9
12	1	14,29	65,47	94,1	99,1
13	0	98,81	97,33	45,64	2,69
13	1	1,19	1,2	5,02	0,45
13	2	0	1,47	49,34	96,86
14	0	100	99,73	94,8	42,6
14	1	0	0,27	4,41	17,94
14	2	0	0	0,44	6,28
14	3	0	0	0,35	33,18
15	0	100	99,6	72,69	9,87

Номер задания / критерия оценивания в КИМ	Количество полученных первичных баллов	Процент участников экзамена в Липецкой области, получивших соответствующий первичный балл за выполнения задания в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки			
		в группе не преодолевших минимальный балл, %	в группе от минимального до 60 т.б., %	в группе от 61 до 80 т.б., %	в группе от 81 до 100 т.б., %
15	1	0	0,13	0,97	1,79
15	2	0	0,27	26,34	88,34
16	0	100	99,33	80,53	8,97
16	1	0	0,53	6,78	9,42
16	2	0	0,13	12,69	81,61
17	0	100	100	96,65	54,71
17	1	0	0	2,64	17,49
17	2	0	0	0,26	3,14
17	3	0	0	0,44	24,66
18	0	100	100	98,41	79,37
18	1	0	0	1,5	16,14
18	2	0	0	0,09	1,35
18	4	0	0	0	3,14
19	0	100	100	99,47	91,03
19	1	0	0	0,44	5,38
19	2	0	0	0,09	0,9
19	4	0	0	0	2,69

В целом результаты 2025 года сопоставимы с результатами 2024 года. Стоит отметить, что в этом году одно из заданий – задание 6, направленное на проверку умения решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов, выполнило 100% участников группы, получивших от 81 до 100 тестовых баллов, хотя за счет плохого его выполнения процент выполнения в целом оказался 93,7%. При этом средний процент выполнения свыше 95% получили задания 2 (проверка умения оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами) и задание 4 (проверка умения оперировать

понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность), 96,35% и 97,35% соответственно. Средний тестовый балл составил 62,88, что выше, чем в целом по Российской Федерации (60 баллов). Это означает, что выбор профильного экзамена по математике выпускниками был сделан осознанно, ребята достаточно тщательно готовились к нему, и, соответственно это свидетельствует об освоении образовательной программы СОО по математике на должном уровне.

Стабильно лучше выпускники справляются с задачами курса «Алгебра и начала математического анализа», неплохо, особенно с простейшим заданием из курса «Вероятность и статистика» и традиционно хуже с заданиями блока курса «Геометрия», хотя с заданиями 14 и 17 повышенного уровня сложности в этом году ребята справились неплохо, конечно, на фоне предыдущих лет.

Результаты выпускников 2025 года показали сформированность у них умения использовать математические знания для решения практических задач, моделирования реальных ситуаций и анализа данных, умения выполнять алгебраические преобразования, решать уравнения и неравенства, умения работать с различными типами чисел и выражений. Недостаточно сформированы умения анализировать функции и решать задания по геометрии. А сформированных метапредметных умений (владение навыками познавательной и учебно-исследовательской и проектной деятельности, способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности) хватает на выполнение заданий базового и повышенного (самых простых из них) уровней сложности.

3.1.1.2. Выявление сложных для участников ЕГЭ заданий

- *Задания базового уровня с процентом выполнения ниже 50 отсутствуют.*

По результатам, приведенным в таблице, стоит отметить, что выпускники 2025 года очень хорошо справились со всеми заданиями базового уровня сложности. В среднем все задания (кроме задания 3, в котором требовалось знание формул площади поверхности тел вращения) имеют процент выполнения свыше 80%, причем 3 из 7 – заданий имеют процент выполнения свыше 93%. Приведенные результаты значительно выше результатов ЕГЭ-2024. Это

свидетельствует о сформированности на базовом уровне умений решать уравнения и неравенства, строить и исследовать простейшие математические модели, выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, выполнять вычисления и преобразования, выполнять действия с функциями. Следовательно, содержание курса математики на базовом уровне усвоено должным образом практически всеми выпускниками, кроме экзаменуемых, не преодолевших минимальный порог.

○ *Задания повышенного и высокого уровня (с процентом выполнения ниже 15)*

Все задания повышенного уровня сложности первой части (за исключением задания 5) имеют процент выполнения свыше 78%, что, безусловно, является очень хорошим показателем освоения образовательной программы СОО по математике. Задание 5, являющееся усложненным заданием по теории вероятностей, выполнили в среднем 71,35% выпускников. Стоит отметить, что процент выполнения заданий повышенного уровня первой части и в 2024 году был достаточно высоким, что свидетельствует о систематической математической подготовке обучающихся на достаточно высоком уровне.

Задания повышенного уровня сложности второй части, относящиеся к геометрическому блоку, традиционно являются одними из самых сложных заданий в КИМ и имеют следующий процент выполнения: 14 задание – 5,54% (против 3,24% в 2024 году), 17 задание – 4,09% (против 6,56% в 2024 году). Также традиционно низкий процент выполнения имеют задания высокого уровня сложности – с 18 заданием справились 1,02 (3,24% - в 2024 году) и с 19 заданием – 0,54% (7,08% в 2024 году) выпускников. Таким образом, наиболее сложными заданиями повышенного и высокого уровня сложности (имеющими процент выполнения меньше 15%) оказались задания 14, 17, 18 и 19.

○ *Прочие задания*

Отдельного внимания заслуживает задание 3 – достаточно простая стереометрическая задача базового уровня сложности. С этим заданием справились 40,8%, 76,92%, 92,83% выпускников групп: от минимального до 60 баллов, от 61 до 80 баллов и от 81 до 100 баллов соответственно. Стоит отметить, что в группе выпускников, получивших от 81 до 100 баллов, ВСЕ задания первой части, включая задания повышенного уровня сложности, кроме задания 3, имеют процент выполнения выше 95%. По-видимому, это связано с заменой многогранников на тела вращения.

Соответственно, это означает, что данная тема усвоена выпускниками хуже, кроме того, сказывается и незнание необходимых формул (в отличие от базовой математики их нет в справочных материалах). Причем наличие такой же проблемы у выпускников, сдававших базовую математику, это только подтверждает.

3.1.1.3. Прочие результаты статистического анализа

В группе выпускников, не преодолевших минимальный порог, только 2 задания выполнены более чем половиной участников группы. Это задание 2, проверяющее умения выполнять операции с векторами и задание 4, проверяющее умение строить и исследовать простейшие математические модели (простейшее задание на вероятность). Их проценты выполнения 69,05% и 84,52% соответственно. В этой группе обучающихся с заданиями 14-19 не справился ни один выпускник. Предельно низкий процент выполнения имеет задание 13 – 0,6%.

В группе выпускников, набравших баллы от минимального до 60, затруднения вызвало одно задание базового уровня сложности – это задание 3, простейшая планиметрическая задача, процент выполнения которой составил всего 40,8%. Также среди заданий повышенного уровня сложности, более низкий процент выполнения имеет задание 5, более сложное задание по теории вероятности. Процент его выполнения участниками данной группы – 46,93%, что в принципе ожидаемо для задания повышенного уровня сложности. Очевидно, что задания второй части КИМ оказались для этих выпускников непосильными.

Стоит отметить, что задания 3 и 5 оказались более сложными и для выпускников, получивших тестовые баллы от 61 до 80 и от 81 до 100. С заданием 3 справились 76,92% и 93,83% соответственно, а с заданием 5 – 87,31% и 95,52% соответственно. Это при том, что с остальными заданиями первой части, как базового, так и повышенного уровней сложности, в группе выпускников, набравших от 61 до 80 баллов, все задания имеют процент выполнения от 93%, а в группе набравших от 81 до 100 баллов от 96%.

Задания второй части КИМ повышенного и высокого уровня сложности вызвали затруднения у всех выпускников. Самым доступным оказалось задание 13, проверяющее умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов. В 2025 году это было тригонометрическое уравнение, с которым справилось всего 37,45% выпускников, причем даже в группе обучающихся, не преодолевших порог, есть выпускники, получившие баллы за его

решение – 0,6%. Низкий процент выполнения этого задания – 2,07% показали и выпускники, набравшие по результатам ЕГЭ от 27 до 60 баллов. Задание 13, на наш взгляд, было несколько сложнее, чем в 2024 году, поэтому выпускники группы, набравшие от 61 до 80 баллов, справились с ним хуже, чем в 2024 – 51,85% против 69,4% в 2024 году. А вот на выпускниках, получивших от 81 до 100 баллов, это усложнение не сказалось. Верно выполнило 13 задание 97,09% выпускников. Значительно лучше выпускники этой группы справились с заданием 14 – 43,35%, в прошлом году результат составил 15,35%. Более лучший результат выпускники показали и при решении стереометрической задачи 17. Это 27,25% в 2024 и 32,59% в 2025 году.

Выпускники из группы получивших от 81 до 100 баллов очень успешно справились с решением показательного уравнения (задание 15 – 89,24%) и построением и исследованием экономической модели (16 задание – 86,32%). Этот результат хуже, чем в прошлом году. Это явилось следствием усложнения этих заданий по сравнению с 2024 годом, причем в обоих заданиях процентное соотношение выполнивших их, уменьшилось приблизительно на 4-5% в группе выпускников, получивших от 81 до 100 баллов и на 9% в группе набравших от 61 до 80 баллов.

Добавление «подвохов» в решение заданий 18 и 19 и изменение критериев оценивания решения привело к тому, что легкое усложнение заданий сказалось на довольно резком снижении тестового балла. С 18 заданием, в котором необходимо было исследовать уравнение с параметром, справилось всего лишь 1,02% выпускников (3,24% в 2024 году), в группе получивших больше 81 балла с заданием справилось 7,85% (17,64% в 2024). С 19 заданием справилось 0,54% (7,98% в 2024 году) обучающихся, в группе набравших более 81 балла это 4,48% (22,14% в 2024). Причем в группах выпускников, набравших меньше 61 балла, с этими заданиями не справился ни один обучающийся.

В целом результаты выполнения заданий первой части в 2025 году выше, чем в 2024, а во второй части задания 13, 14 и 17 имеют более высокий процент выполнения, а задания 15, 16, 18 и 19 соответственно более низкий.

3.1.2. Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

Самыми сложными для выпускников 2025 года оказались геометрические задания второй части КИМ ЕГЭ. Впрочем, эта ситуация повторяется из года в год.

Рассмотрим **задание 14**.

Характеристика задания. В этом году 14 задача, проверяющая умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объем фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии была следующего содержания:

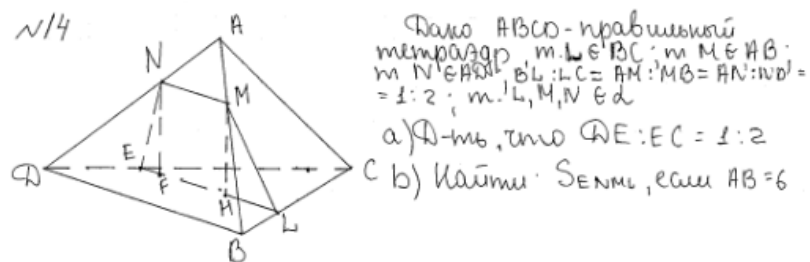
- 14** На рёбрах BC , AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L , M и N соответственно. Известно, что $BL : LC = AM : MB = AN : ND = 1 : 2$.
- а) Докажите, что плоскость α , проходящая через точки L , M , N , делит ребро CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 6$.

Типичные ошибки. Задание 14 смогли решить 43,35% выпускников, получивших на ЕГЭ от 81 до 100 баллов. Очевидно, что большинство выпускников не обладают необходимым для решения этой стереометрической задачи уровнем пространственного мышления. Ребята не только не могут проанализировать стереометрическую конструкцию, но и «не видят» ее. Это при том, что в данном задании были конструкции, хорошо известные выпускникам, особенно сильным. Выпускники не привыкли к обоснованному построению чертежа, часто неверно строят сечение или не могут доказать, что построили действительно нужное сечение (чаще всего возникают проблемы с параллельностью). Далее не могут определить и обосновать, какой фигурой является сечение. Делают неверные предположения и, соответственно, неверно ищут площадь. Традиционно к этому заданию приступают достаточно хорошо

подготовленные выпускники, поэтому можно рекомендовать им при изучении соответствующих тем решать больше заданий на построение чертежей, решать задания по готовым чертежам, и, конечно, при решении данного задания требуется уверенное владение теоретическим материалом.

Стоит отметить, что среди выпускников, получивших свыше 80 баллов, 17,94% получили 1 балл. В основном это участники, доказавшие утверждение пункта а), критерий с вычислением площади в пункте б) сработал в единичных работах. Также минимальное количество работ было с вычислительными ошибками. Суммарно по этому критерию получило 2 балла всего 6,28% выпускников. Один балл получило 4,41% выпускников из группы, написавших на 61 - 80 баллов.

В следующем примере за задание выставлен 1 балл.



Решение:

- а) 1) т.к. $ABCD$ - правильный тетраэдр, то $\triangle ABC$ - $\triangle ABC$;
- 2) Для того чтобы построить сечение, мы соединим AM и AN , т.к. M и N - середина AB и AD соответственно, проведем прямую, параллельную прямой MB , она пересечет CD в E ;
- 3) т.к. $\triangle ABC$ - $\triangle ABC$, то $AC = AB = CB$;
- 4) т.к. $\triangle ABC$ - $\triangle ABC$, рассмотрим $\triangle ECL$ и $\triangle DCB$.
 $\angle ECL = \angle DCB$ (как соответственные при $EL \parallel CB$ и секущей EC)
 $\triangle ECL \sim \triangle DCB$ (по 2-м)
 $\frac{CL}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{2}{3}$
- 5) т.к. $\frac{CE}{CB} = \frac{2}{3}$, то $\frac{DE}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE \cdot EC = 1 \cdot 2$

- б) 1) Рассмотрим чет-ик $ENML$. Т.к. $NM \parallel EL$, то $ENML$ - это трапеция
- 2) Рассмотрим $\triangle ENO$ и $\triangle MBL$:
 $1) \text{ т.к. } AD = AB, \text{ а } AN = ND = 1:2 \text{ и } AM = MB = 1:2, \text{ то } AN = MB$
 $2) \text{ т.к. тетраэдр } ABCD \text{ - правильный, то } \angle NDE = \angle MBL$
 $3) \text{ т.к. } CD = CB, \text{ а } DE : EC = 1:2 \text{ и } BL : LC = 1:2, \text{ то } DE = BL$
 $\Rightarrow \triangle ENO = \triangle MBL$ (по 2 сторонам и углу между ними)
 $\Rightarrow NE = ML$
- 3) т.к. $NE = ML$, то $ENML$ - $\triangle ENML$ трапеция
- 4) $S_{ENML} = \frac{NM + EL}{2} \cdot h$
- 5) т.к. тетраэдр $ABCD$ - правильный, то $\angle NAM = 60^\circ$;
 $\angle ECL = 60^\circ$; $\angle MBL = 60^\circ$
- 6) Рассмотрим $\triangle NAM$:
по т. кос.
 $NM^2 = AN^2 + AM^2 - 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos \angle NAM$
 $NM^2 = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$
 $NM^2 = 8 - 8 \cdot \frac{1}{2}$
 $NM^2 = 8 - 4$
 $NM^2 = 4$
 $NM = 2$

7) Рассчитаем ΔECL :
по $\text{th } \cos$:

$$EL^2 = EC^2 + LC^2 - 2 \cdot EC \cdot LC \cdot \cos \angle ECL$$

$$EC = LC = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$EL^2 = 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$EL^2 = 32 - 32 \cdot \frac{1}{2}$$

$$EL^2 = 32 - 16$$

$$EL^2 = 16$$

$$\Downarrow EL = 4$$

8) Рассчитаем направление $ENML$.

• Опустим из M N $u m N$ высоту, так что $NF \perp EL$,
 $MH \perp EL$

• в $\Delta NF \perp EL$ и $MH \perp EL$, то $NMHF$ - прямоугольник,
в котором $NF = FH = 2$

• в $\Delta ENML$ - рис направление, то $EF = \text{рис} FL =$
 $= \frac{EL - FH}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$

9) Рассчитаем ΔNEF :
по $\text{th } \text{гипотенуза}$:

$$NE^2 = NF^2 + EF^2$$

$$NF = \sqrt{NE^2 - EF^2}$$

~~рис~~ 10) Рассчитаем ΔNDE :
по $\text{th } \cos$:

$$NE^2 = DE^2 + DN^2 - 2 \cdot DE \cdot DN \cdot \cos 60^\circ$$

$$ND = \frac{2}{3} AB = 4; DE = \frac{1}{3} AC = 2$$

$$NE^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$NE^2 = 20 - 8$$

$$NE^2 = 12$$

$\Downarrow$

$$NE = 2\sqrt{3}$$

10) Рассчитаем ΔNEF :

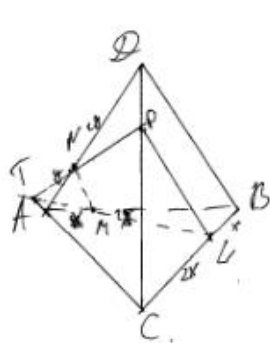
$$NF = \sqrt{12 - 1} = \sqrt{11}$$

11) $h = NF$

$$12) S_{ENML} = \frac{2 + 4}{2} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$$

Ответ. б) $3\sqrt{11}$

Один балл стоит и за следующее решение. Стоит отметить, что при решении заданий 14 и 17 обучающиеся последнее время доказывают именно пункт а), не приступая к пункту б).



14.

Док-тв:

а) $CP:PD = 2:1$

Решение: а) проведем LM где; $LM \cap AC = T$.

$$\begin{cases} T \in (ACD) \\ N \in (ACD) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{пров } TN; \\ TN \cap CD = P. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} P \in (CBD) \\ L \in (CBD) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{пров } LP; \\ M \in (ABD) \\ N \in (ABD) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{пров } MN. \\ MN \cap PL = \text{сек. } K. \end{array} \right.$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} \Rightarrow \text{по обратной тл. Талеса } \left\{ \begin{array}{l} NM \parallel BD \\ NM \in (NML) \end{array} \right\} \Rightarrow ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BD \parallel (NML) \text{ (по признаку параллельности)} \\ PL \in (NML) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel PL = 2$$

По тл. Талеса: $\frac{CP}{PD} = \frac{CL}{LB} = \frac{2}{1}$ итд.



N14

Дано: ABCD-тетраэдр.

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} = \frac{1}{4} \quad AB=10$$

Доказать: а) (LMN) делит CD 4:1 от C

Найти: б) S_{MNLE}

а) Д-во:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} \Rightarrow MN \parallel BD$$

$$MN \parallel LE \text{ (по постро.)} \Rightarrow LE \parallel BD$$

$$\text{т.к. } \frac{BL}{LC} = \frac{1}{4} \text{ и } LE \parallel BD \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{EC}{DE} = \frac{1}{7}$$

б) Решение

т.к. ABCD-тетраэдр все стороны равны 10
 $\angle A$ общ., $MN \parallel BD \Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$$MN = \frac{BD}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\angle C \text{ общ.}, LE \parallel BD \Rightarrow \triangle CLE \sim \triangle CBD \quad \frac{CL}{CB} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$LE = \frac{1}{5} BD = 2$$

$$ML = NE \text{ (} MN \parallel LE \text{ и лежат на параллельных сторонах.)} \Rightarrow MNLE \text{ п.в.т. трап.}$$

$$ND = \frac{1}{5} AB = 2 \quad DE = \frac{1}{7} DC = 2 \quad \angle ADC = 60^\circ \text{ (} \angle ABC \text{ - прот.)}$$

$$NE^2 = ND^2 + DE^2 - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot ND \cdot DE$$

$$NE^2 = 4 + 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2$$

$$NE^2 = 4 - 2 = 2$$

$$S_{MNLE} = NH$$

$$EH = (2-2) : 2 = 0 \text{ (т.к. п.в. трап.)}$$

$$NH = \sqrt{NE^2 - EH^2} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}$$

$$S_{MNLE} = \frac{1}{2} \cdot (MN + LE) \cdot NH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: а) 90 б) } 2\sqrt{2}$$

Это решение оценено 0 баллов, именно в нем отсутствует доказательство параллельности.

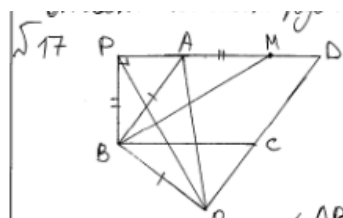
Задание 17, особенно его пункт а), было проще, чем в 2024 году. Это планиметрическая задача, проверяющая умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы. С

его выполнением справилось 32,59% выпускников, получивших свыше 80 баллов (27,25% в 2024). В группе выпускников, получивших от 61 до 80 баллов, с этим заданием справилось только 1,5%. Общий процент выполнения – всего 4,09%. Кроме того, в задаче этого года участвуют более изученные фигуры – параллелограмм и треугольники, что говорит о недостаточном изучении темы многоугольники (касается многоугольников, имеющих 5 и более сторон). Среди достаточно *распространенных ошибок* – недостаточная обоснованность равенства отрезков в пункте а), а также отсутствие схемы решения пункта б). Зачастую ребята искали все, что могли найти в условии задачи.

17 В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ , причём точка P лежит на стороне AD , а точка Q — на стороне CD . На стороне AD отмечена точка M . Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ , если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.



а) Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$ (по св-ву параллелограмма)
 $\angle PAB = 180^\circ - 180^\circ - \alpha = \alpha$ (смежные)
 $\angle ABP = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (Th углов Δ)
 $\angle ABC = \angle ADC = \alpha$ (св-ву параллелограмма)
 $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$ (по св-ву параллелограмма)
 $\angle BCQ = 180^\circ - 180^\circ + \alpha = \alpha$ (смежные)
 BQ — высота $\Rightarrow \angle BQC = 90^\circ$ (по опр. высоты)
 $\angle QBC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (по Th углов Δ)
 $\angle PBQ = \angle PBA + \angle ABC + \angle CBQ = 90^\circ - \alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$
 $\angle PBQ = \angle BAM = 180^\circ - \alpha$
 $AB = BQ$; $BP = AM$
 $\Rightarrow \Delta PBQ = \Delta MAB$ (по 2 сторонам и углу между ними) $\Rightarrow BM = PQ$

$\Rightarrow BM = PQ$

б) $AM = BP = 8$; $AB = BQ = 10$.

$\angle BPA = 90^\circ \Rightarrow \Delta BPA$ — прямоугольный (по определению)
 $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$ (по Th Пифагора)

$$\sin \alpha = \frac{BP}{BA} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,8$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,64} = 0,6$$

$$PQ^2 = BP^2 + BQ^2 - 2 \cdot BP \cdot BQ \cdot \cos \alpha \text{ (по Th косинусов);}$$

$$PQ^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 0,6 = 164 - 96 = 68$$

$$PQ = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

$\angle ABQ = 90^\circ$ (по определению высоты) $\Rightarrow \Delta ABQ$ — прямоугольный

$$AQ = \sqrt{AB^2 + BQ^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ (по Th Пифагора)}$$

$S_{\Delta APQ} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр.

$$S_{\Delta APQ} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{17}+5\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}+5\sqrt{2}}{2}-6\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}+5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{17}\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}+5\sqrt{2}}{2}-10\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{(3+\sqrt{17}+5\sqrt{2})(\sqrt{17}+5\sqrt{2}-3)(3-\sqrt{17}+5\sqrt{2})(3+\sqrt{17}-5\sqrt{2})} =$$

$$= \sqrt{(58+2\sqrt{50}\sqrt{17})(42+2\sqrt{17}\sqrt{50})} = \sqrt{58 \cdot 42 + 58 \cdot 10\sqrt{34} + 42 \cdot 10\sqrt{34} + (10\sqrt{34})^2}$$

Ответ: б) $\sqrt{58 \cdot 42 + 58 \cdot 10\sqrt{34} + 42 \cdot 10\sqrt{34} + (10\sqrt{34})^2}$

Приведенное выше решение оценено в 0 баллов, так как участник неверно прочел условие и поставил основания высот на продолжение сторон.

№14.

а) По условию: $BM = PQ$

1) Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle BQP$
 Пусть $AM = BP = x$, а $AB = BQ = y$

2) Пусть $\angle BAP = \angle = \angle BCP$
 т.к. $ABCD$ - паралл-м, то $\angle ABC = 180^\circ - \angle$
 в $\triangle CQB$: $\angle BQC = 90^\circ$ (BQ - высота); $\angle BCQ = \angle$ ~~т.к.~~ $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CBQ = 90^\circ - \angle$
 в $\triangle APB$: $\angle BPA = 90^\circ$ (BP - высота) $\angle BAP = \angle \Rightarrow \angle ABP = 90^\circ - \angle$
 3) $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBQ + \angle QBC \Rightarrow \angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle QBC$
 $= 180^\circ - \angle - 90^\circ - \angle - 90^\circ + \angle = \angle$
 Тогда $\triangle ABM = \triangle BQP$ по 2-м сторонам и углу между ними. А тогда $PQ = BM$ ч.т.д.

б) Спра? $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$

1) в $\triangle BPA$ по т. Пифагора $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

2) в $\triangle ABQ$: $AB = BQ = 10$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ABQ$ - р.б. $\Rightarrow$
 $\angle ABQ = 90^\circ - \angle + \angle = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ по т. Пифагора $AQ = \sqrt{AB^2 + BQ^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

№14 в $\triangle PBQ$: по т. кос: $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 - 2PB \cdot BQ \cdot \cos \angle$,
 где $\cos \angle = \frac{AP}{AB}$ (из $\triangle APB$). $\Rightarrow \cos \angle = \frac{3}{5}$.

$PQ^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} = 164 - 96 = 68 \Rightarrow PQ = 2\sqrt{17}$.

в $\triangle APQ$ по т. кос: $\cos \angle APQ = \frac{AP^2 + PQ^2 - AQ^2}{2AP \cdot PQ} = \frac{36 + 68 - 200}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{-4}{2\sqrt{17}}$.

$\sin \angle APQ = \sqrt{1 - \cos^2 \angle APQ}$ (по соотн. триг. тожд.)
 $\sin \angle APQ = \sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ \cdot \sin \angle APQ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 6$.

Ответ: 6

Данное решение получило максимальный балл -3.

Все это означает недостаточность владения теоретическими знаниями, умениями применять их на практике, а также сформированности метапредметных умений, отвечающих за применение знаний в новых условиях и построения логики решения. Поэтому важно работать над этими заданиями с группами выпускников, проявляющих повышенные способности к изучению геометрии. Необходимо формировать абстрактное и пространственное мышление.

Следующим сложным заданием традиционно является **задание 18** (с параметром), которое проверяет умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами. В 2025 году это было уравнение, которое подстановкой сводилось к исследованию более простых. Но самым сложным моментом было обоснование сохранения при таком переходе требуемого количества корней. С этим моментом справились единицы, поэтому полный балл получило лишь 3,14% выпускников. Хотя балл за переход с помощью подстановки без дальнейшего продвижения получили 16,14% выпускников, получивших свыше 80 тестовых балла.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4x + |x - a| - |3x + 1|)^2 - (a + 1)(4x + |x - a| - |3x + 1|) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Один балл за сведения исходного уравнения к рассмотрению отдельных случаев выставлен за следующее решение.

$$\sqrt{18} \quad \left(\sqrt{x+|x+a|} - \sqrt{6x} \right)^2 + (a+1) \left(\sqrt{x+|x+a|} - \sqrt{6x} \right) - a - 1 = 0$$

пусть $\left(\sqrt{x+|x+a|} - \sqrt{6x} \right) = t$, тогда это выражение равно.

$$t^2 + (a+1)t - (a+1) = 0$$

если $(a+1) = 0$ ($a = -1$), то

t^2 должно иметь 2 решения

попробуем построить гра-

фик $t = \sqrt{x+|x+a|} - \sqrt{6x}$, добавим

к нему функцию $x+a$, где

a переключает функцию $|x|$ до

оси Ox .

и, следовательно, t имеет

только одно решение, во всех точках, кроме $a = 0$

(если сложить графики), значит ~~тогда~~ $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$

$t^2 + (a+1)t - (a+1) = 0$ - тогда ответов должно 2, дискри-

минант этой функции должен быть положительным

$$D = (a+1)^2 + 4(a+1) \geq 0$$

$$(a+1)(a+5) \geq 0 \quad (a+1)(a+1+4) \geq 0 \quad \text{во всем } a+1$$

$$(a+1)(a+1+4) \geq 0 \quad \rightarrow \quad a+1 \geq 0 \quad a+5 \geq 0$$

$$|a+1|/|a+5| \geq 0 \quad \rightarrow \quad a = -1 \quad a = -5$$

по методу интервалов:

и, следовательно, что $a \neq \pm 1$ и $a \neq 0$

$$a \in (-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (0; \infty)$$

рассмотрим t и рас-

смотрим ее корни во

всех случаях:

$$\sqrt{x+|x+a|} - \sqrt{6x} = 0$$

пусть $x+a = 0$, а $6x = a$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} - : \sqrt{x} - \sqrt{-a} + \sqrt{6x} = 0$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} + : 12x = a - \text{линейная}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{-a} - \sqrt{6x} = 0$$

$$-a = 0 - x \text{ - подос}$$

$$\text{тимо, что некорректно}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} - : \sqrt{x} + \sqrt{-a} + \sqrt{6x} = 0$$

$$12x = -a - \text{линейная}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + : \sqrt{x} + \sqrt{-a} - \sqrt{6x} = 0$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

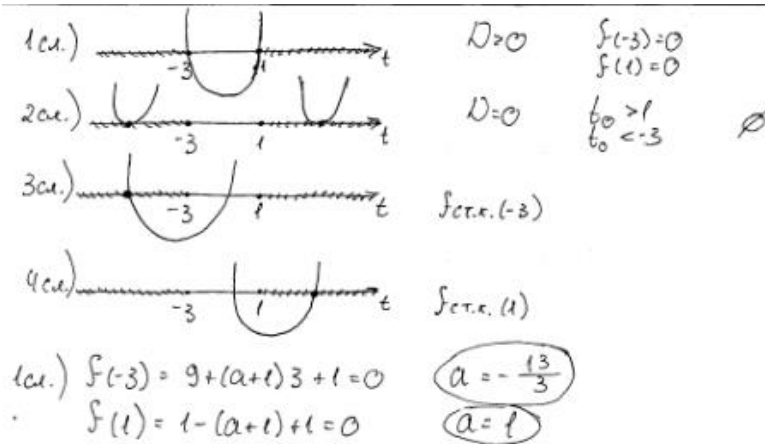
$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

$$2x = -a - \text{линейная}$$

Приведенное ниже решение оценено 0 баллов, так как кроме выполненной подстановки никакого обоснованного продвижения дальше нет.

$$\begin{aligned} & (4x + |x-a| - |3x+1|)^2 - (a+1)(4x + |x-a| - |3x+1|) + 1 = 0 \\ & (4x + |x-a| - |3x+1|) = t \\ & t^2 - (a+1)t + 1 = 0 \\ & D = (a+1)^2 - 4 = a^2 + 2a + 1 - 4 = a^2 + 2a - 3 \\ & a^2 + 2a - 3 = 0 \\ & D = 4 + 12 = 16 \quad a_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = [-1, 3] \\ & \text{если } D=0, \text{ то } a \in (-3; 1) \\ & \text{если } D=0, \text{ то } a = -3 \text{ и } a = 1 \\ & \text{если } D>0, \text{ то } a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{aligned}$$



В следующем задании обоснованный переход и отсутствие дальнейшего вразумительного решения привели к также к оценке в 1 балл.

18) $(4x + |x-a| - |3x+1|)^2 - (a+1)(4x + |x-a| - |3x+1|) + 1 = 0$ (a=? тран. реш.)

Проанализируем ур-е при раскрытии модулей:

1) при $a > -\frac{1}{3}$

$x = a$

$x = -\frac{1}{3}$ - $-\frac{1}{3}$ + a + x

Заметим, что если $x \in [-\frac{1}{3}; a]$, то

ур-е принимает след. вид:

$$(4x - x + a - 3x + 1)^2 - (a+1)(4x - x + a - 3x + 1) + 1 = 0$$

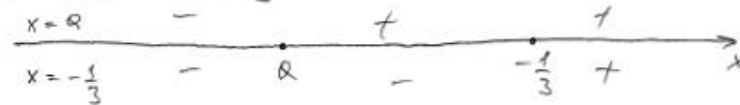
$$(a+1)^2 - (a+1)(a+1) + 1 = 0$$

$1 = 0$, в данном случае корней нет.

(18 продолж.)

при $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) ; (a; +\infty)$; ур-е будет иметь 2 корня

② при $a < -\frac{1}{3}$



В данном случае при всех x ур-е будет иметь 2 корня

Пусть $(4x + |x-a| - |3x+1|) = t$, тогда

~~$t^2 - (a+1)t + 1 = 0$~~

$$t^2 - (a+1)t + 1 = 0$$

$$D = a^2 + 2a + 1 - 4 = a^2 + 2a - 3 = (a+3)(a-1)$$



при $a \in (-\infty; -3) ; (1; +\infty)$, $D > 0$, т.е. ур-е имеет 2 корня

Найдем значения " a ", которые необходимо исключить

Пусть $x = -\frac{1}{3}$, тогда

$$\left(-\frac{4}{3} + \left(-\left(-\frac{1}{3} - a\right)\right) - (-1+1)\right)^2 - (a+1)\left(-\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3} - a\right) - (-1+1)\right) + 1 = 0$$

$$\left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + a\right)^2 - (a+1)\left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + a\right) + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 - (a+1)(a-1) + 1 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - (a^2 - 1) + 1 = 0$$

$$-2a = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$a = \frac{3}{2}$
 $\frac{3}{2} > -\frac{1}{3} \Rightarrow$ ~~исключается~~ или исключается

(13 пункт.)

Пусть $x = a$, тогда

$$(4a - 3a - 1)^2 - (a+1)(4a - 3a - 1) + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 - (a+1)(a-1) + 1 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - a^2 + 1 + 1 = 0$$

$$a = \frac{3}{2} > -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \text{ мы исключили}$$

Тогда при $a \in (-\infty; -3); (1; \frac{3}{2}); (\frac{3}{2}; +\infty)$,
исходн. ур-е имеет 2 р-а.

Ответ: $(-\infty; -3); (1; \frac{3}{2}); (\frac{3}{2}; +\infty)$

Также одним из самых сложных является **задание 19**, проверяющее владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное; умение выбирать подходящий метод для решения задачи. Задача имела следующий вид:

- 19** На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх или пяти чисел из записанных является целым числом.
- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 305 и 1511?
- б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 305?
- в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2 . Найдите наименьшее возможное значение n .

Такая формулировка сделала задачу сложнее, чем в 2024 году за счет необходимости доказательства в пункте а). Поэтому средний процент выполнения этого задания оказался 4,48%, а полный балл смогли получить лишь выпускники

с тестовым баллом от 81 до 100 и то, это всего 2,69%. Проблемы при решении задания возникают в связи с нехваткой умений решать задачи высокого уровня сложности, олимпиадного характера, выстраивать логику многоходовых решений. В большей степени именно на выполнение этого задания влияет несформированность метапредметных умений.

Поэтому часто встречаются решения ничего общего не имеющие с ответом на поставленный в задаче вопрос. Следующее решение, естественно получило оценку в 0 баллов.

№19.

а) Да, могут; пример: $\frac{305+1511+2}{3} = \frac{1818}{3} = 606$.

числа 305 и 1511 могут быть записаны как сумма одинаковых чисел, при этом ~~числа 305 и 1511~~

~~числа 305 и 1511~~ среднее арифм. ~~чисел 305 и 1511~~ равно или пяти чисел, включая 305 и 1511, является целым числом (см. пример)

д) Да, может; пример: $305^2 = 12025$

$\frac{305+12025+3}{3} = \frac{12333}{3} = 4111$

$\frac{305+12025+10+20+30}{5} = \frac{12390}{5} = 2478$

в) т.к. среди n нет одинаковых, то $n \neq 1$, т.к. $1^2 = 1 \Rightarrow n > 1$

пример: ~~числа~~ чтобы среднее арифм. моды 3-х или 5-ти чисел было целым числом, то все числа должны быть кратными 15 $\Rightarrow n$ наим. = 15, а $n^2 = 225$

пример последовательности: 15, 30, 45, 60, 75, 225, 300, 600, 900, 1200.

n наим. = 15

ответ: а) да; д) да; в) 15.

Одним баллом (за выполнение пункта а) оценено решение

№19

а) Нет, не может. $305 \equiv 0 \pmod{5}$

Пусть существует такая набор чисел, $305 \equiv 2 \pmod{3}$

Если мы возьмем только число 1511; то оставшиеся

$1511 \equiv 1 \pmod{5}$

$1511 \equiv 2 \pmod{3}$

4 числа, которые мы выбрали (a, b, c, d), их сумма $(a+b+c+d) \equiv 4 \pmod{5}$, тогда мы взяли и или число 1511

$(a+b+c+d+1511) \equiv 0 \pmod{5}$, но если мы вместо числа 1511 возьмем число 305 то наша сумма $(a+b+c+d) \equiv 4 \pmod{5}$ противоречие.

б) рассмотрим остатки которые могут
получаться при делении числа n на 3:
 $(0; 1; 2)$ ~~и~~ и n^2 на 3 $(0; 1)$, и на
5 $(0; 1; 2; 3; 4)$ и n^2 на 5 $(0; 1; 4)$. Рассмотрим
аналогично n а но только для ~~чисел~~ кратных
5, заметим, что ~~т.к.~~ $305 \equiv 0 \pmod{5}$, то
и все остальные числа тоже должны быть кратны 5.
В то же время $305 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$ все
числа тоже должны иметь остаток 2 при делении
на 3, но вот никакое $n^2 \not\equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$
такое невозможно.

в) пусть исходное число это n . заметим, что:
 $n \neq 1$, т.к. $1 \equiv 1^2$
 $n \neq 2$, т.к. все числа должны иметь одинаковый
~~остаток~~ ~~при делении на 5 и на 3~~ остаток при делении на 5 и на 3
 $4 \equiv 1 \pmod{3}$ $2 \equiv 2 \pmod{3}$ значит это n должно
иметь остаток 0

$n \equiv 3$ имеет остаток

$n \equiv 4$ тоже $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$

$n \equiv 5$ тоже $5^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$n \equiv 6$ подходит $6 \equiv 1 \pmod{5}$ $36 \equiv 1 \pmod{3}$

тогда оставшиеся числа — это те что делятся
на 6 и имеют ост. 1

А вот следующее решение получило 4 балла. Но при этом, оно свидетельствует о недостаточно сформированном умении выбирать способ решения. И доказательство скорее выстраивается интуитивным путем, чем четко логическим его построением. Причем уровень владения материалом у выпускника безусловно очень высок.

а) Из условия следует, что сумма любых ч-х чисел делится на 4 и любых семи чисел - на 7. Значит сумма чх из остатков от деления на 4 и 7 должна ~~каждое~~ делиться на 4 и 7 соответственно.

~~Пусть~~ Нахождение остатка от деления числа a на число b будем записывать как $a \% b$.

Таким образом

$$1414 \% 4 = 2 \quad 567 \% 4 = 3$$

$$1414 \% 7 = 0 \quad 567 \% 7 = 0$$

Так как максимальный остаток от деления на 4 равен 3, то единственной подходящей суммой остатков ~~кажд~~ группы из 4 чисел (группы которых 1414 и 567) равна 3 (так как делится на 4 и меньше $2+3+3+3=11$ и больше 5). Значит сумма остатков на 4 любых ~~двух~~ из оставшихся чисел должна быть равна 3. Это возможно, если у пар чисел остатки ~~кажд~~ при делении на 4 равны 0 и 3 или 1 и 2. Но это означает, что будет хотя бы два числа с одинаковыми остатками, и при взятии их в четверку ~~из~~ вместе с 1414 и 567 получим только такие суммы остатков:

$$2+3+0+2=5$$

$$2+3+3+2=10$$

$$2+3+1+2=8$$

$$2+3+2+2=9$$

Ни одно из этого не делится на 4. Значит такой случай невозможен.

б) Представим число b в виде: $n+b$, где n - целое, b - остаток при делении на 4 ($n \% 4$) и $a = n - b$, откуда следует, что $\frac{a}{4} = K$, где K - целое число.

Посмотрим как будет выглядеть n^2 :

$$n^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

поделим на 4:

$(aK + 2bK) + \frac{b^2}{4}$. Значит остаток от деления n^2 на 4 равен остатку от деления b^2 на 4, где $b = n \% 4$.

Из пункта а) $567 \% 4 = 3$

Переберём все возможные b (от 0 до 3 включительно) для n . Будем рассматривать четверки чисел $n, n+1, n+2, n+3$, где x - одно из 7 остатков.

1) $b=0$, тогда и для n остаток равен нулю.

Тогда чтобы сумма остатков четверки была равна кратка четырем, остаток числа x должен быть равен 1. ($x \% 4 = 1$). Но тогда взяв ~~нельзя~~ n, n^2 и два числа из оставшихся 7, сумма остатков при делении на 4 будет 2, что не делится на 4.

2) $b=1$, тогда для n^2 остаток равен 1

Чтобы сумма остатков четверки делилась на 4, она должна делиться на 4. Но в четверке из n и n^2 и n^3 из оставшихся чисел сумма остатков равна 10, что не делится на 4.

3) $b=2$, тогда для n^2 остаток равен $2^2 \% 4 = 0$. Здесь всё аналогично с $b=1$, так как можно привести пример четверки из тех четверок чисел, которая не подходит под условие.

4) $b=3$, тогда для n^2 остаток равен $3^2 \% 4 = 1$. Здесь всё аналогично с $b=0$.

Получается, что такой случай невозможен.

в) Сделаем аналогичный перебор с пунктами б), но теперь рассматривая четверки n, n^2, x_1, x_2 , где x_1 и x_2 — 2 любых числа из оставшихся восьми чисел.

1) $n \% 4 = 0$ и $n^2 \% 4 = 0$

Тогда $x_1 \% 4 + x_2 \% 4 = 0$ или 4

Подходят пары $(0,0); (1,3); (3,1); (2,2); (0,4)$

Можно взять все числа оставшихся чисел, кратные 4 (остальные случаи не подходят)

Потому этот случай является потенциальным ответом

2) $n \% 4 = 1$ и $n^2 \% 4 = 1$

Тогда $x_1 \% 4 + x_2 \% 4 = 2$ или 6

Подходят пары остатков $(2,0); (0,2); (1,1); (3,3)$

Подходит только случай, когда у всех чисел остаток на 4 равен одному.

3) $n \% 4 = 2$ и $n^2 \% 4 = 0$

Тогда $x_1 \% 4 + x_2 \% 4 = 2$ или 6

Ни одна из пар прошлого ($n \% 4 = 1$) не подходит

4) $n \% 4 = 3$ и $n^2 \% 4 = 1$

Тогда $x_1 \% 4 + x_2 \% 4 = 0$ или 4

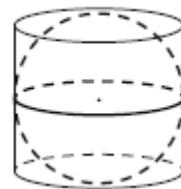
Ни одна из случаев (пар) не подходит

Значит минимальный n равен 4 и равен 4

Пример: 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, 262144, 1048576, 4194304, 16777216, 67108864, 268435456, 1073741824, 4294967040, 17179869184, 68719476736, 274877906944, 1099311627776, 4397246511744, 17588030087168, 70351320300736, 281405281202944, 1125621124811776, 4502484500047104, 18009938000188416, 72039752000753664, 288159008003014656, 1152636032012058624, 4610544128048234496, 18442176512192937984, 73768706050771751936, 295074824203087007744, 1180299296812348030976, 4721197187249592123904, 18884788749038368495616, 75539154996153473982464, 302156619984613895929728, 1208626479938455583718976, 4834505919753822334875904, 19338023679015289339503616, 77352094716061157358014464, 309408378864244629432057728, 1237633515456978517728230976, 4950534061827914070912923904, 19802136247311656283651695616, 79208544989246625134606782464, 316834179956986500538427129856, 1267336719827946002153708519424, 5069386879311784008614834077696, 20277547517247136034459336310784, 81110190069068544137837345243136, 324440760276274176551349380972544, 1297763041105096706205397523890176, 5191052164420386824821590095520704, 20764208657681547303286360382082816, 83056834630726189213145441528331264, 332227338522904756852581766113325056, 1328909354091619027410327064453300224, 5315637416366476109641308257813200896, 21262549665465904438565233031252803584, 85050198661863617754260932125011214336, 340200794647454471017043728500044857344, 1360803178589817884068174914000177429376, 5443212714359271536272699656000711717440, 21772850857437086145090798624002866869760, 87091403429748344580363194496011467479040, 348365613718993378321452777984045869916160, 1393462454875973513285811111936183479664640, 5573849819503894053143244447744733918658560, 22295399278015576212572977791038935674634240, 89181597112062304850291911164155742698536960, 35672638844824921940116764465662297079414720, 142690555379303687760467057862649188317658880, 570762221517214751041868231450596753270635520, 22830488860688590041674730258023870130825421440, 91321955442754360166698921032095480523301688960, 3652878217710174406667956841283819220932067557120, 14611512870840697626671827365135276883728270228480, 58446051483362790506687309460541107534913080913280, 233784205933451162026749237842164430139652323652480, 935136823733804648106996951368657720558609294611840, 3740547294935218592427987805474630882234437178447360, 14962189179740874369711951221898523528937748713789440, 59848756718963505478847804887594094115750994855157760, 239395026875854021915391219550376376463003979420631040, 957580107503416087661564878201505505852015917682524160, 3830320430013664350646259512806022023408063670730096640, 15321281720054657402585038051224088093632254682920386560, 61285126880218629610340152204896352374529018731701546240, 245140507520874518441360608819585409508116074926806184960, 980562030083500073765442435278341638032464307707226739840, 392224812033400029506176974111336655212985723082890695680, 1568899248133600118024707896445346620851942892331562782720, 6275596992534400472098831585781386483407771529326251130880, 25102387970137601888395326343125545933631086117305004523520, 100409551880550407553581305372502183734524344469220018094080, 401638207522201630214325221490008734938097377876880072376320, 160655283008880652085730088596003493975239051150752030949120, 642621132035522608342920354384013975901096204603008123796480, 2570484528142090433371681417536055903604384818412032505185920, 10281938112568361733486725670144223614417539273648130020743680, 41127752450273446933946902680576894457670157094592520082974720, 164511009801093787735787610722307577830680628378370080331898880, 658044039204375150943150442889230311322722513513480321331595520, 2632176156817500603772601771556921245290890054053921285326382080, 10528704627270002415090407086227685001163560216215685141305528320, 42114818509080009660361628344910740004654240864862740565222113280, 168459274036320038641446513379642960018616963459450962260888453120, 673837096145280154565786053518571840074467853837803849043553812480, 26953483845811206182631442140742873603078714153512153961742152500480, 107813935383244824730525768562971494412314856614048615847168610001920, 431255741532979308922103074251885977649259426456194463388674440007680, 1725022966131917235688412297007543910597037705824777853554697760030720, 6900091864527668942753649188030175642388150823307111414218791040122880, 27600367458110675771014596752120702569552603293228445656875164160491520, 110401469832442703084058387008482810278210413172913782627500656641966080, 441605879329770812336233548033931241112841652691655130510002626567864320, 1766423517319083249344934192135724964451366610766620522040010506271457280, 7065694069276332997379736768542899857805466443066482088160042025085829760, 28262776277105331989518947074171599431221865772265928352640168100343319040, 113051105108421327958075788296686397724887463089063713410560672401373276160, 452204420433685311832303153186745590899549852356254853642242689605493104640, 1808817681734741247329212612746982363598199409425019414568970758421972418880, 7235270726938965089316850451095929454392797637700077658275883033687891676160, 28941082907755860357267401804383717817571190550800310633103532134751566707200, 115764331631023441429069607217534871270284762203201242532414128539006266828800, 4630573265240937657162784288701394850811390488128050701296565141560250673132800, 18522293060963750628651137154805579403245561952512202805186260566241002692531200, 74089172243855002514604548619222317612982247810048811220745042265064010770124800, 2963566889754200100584181944768892704519289912401952448829801690602560430805094400, 11854267559016800402336727779075170818077159649607809795319206762410241723220377600, 47417070236067201609346911116300683272308638598431239181276827050640966892881510400, 189668280944268806437387644465202733089234554393724956725107308202563867571526041600, 758673123777075225749550577860810932356938217574899826900429232810255470286104166400, 3034692495108300902998202311443243729427752870299599307601716931241021881144416665600, 12138769980433203611992809245772974917711011481198397230406867725064087524577666662400, 48555079921732814447971236983091903670844045924793588921627470900256350108310666649600, 194220319686931257791884947932367614683376183699174355686509883601025400433242666598400, 776881278747725031167539791729470458733504734796697422746039534404101601732970666393600, 3107525115070900124670159166917881834934018939186789690984158137616406406931882665574400, 12430100460283600508680636667671527339736075756747158763936632550465625627727530662297600, 4972040184113440203472254667068610935894430302698863505574653020186250251091012264918400, 19888160736453760813889018668274443743577721210795454022298612080745001004364049059673600, 79552642945815043255556074673097774974310884843181816089194448323080004017456196238694400, 318210571783260173022224298692391103897243539372727264356777793292320016069824784954777600, 1272842287133040692088897194769564415588974157490909057427111173169278064279299139819104000, 5091369148532162768355588779078257662355896629963636229708444692677112257117196559276416000, 20365476594128651073422355116313030649423586519854544918833778770708449028468786237105664000, 81461906376514604293689420465252122597694346079418179675335115082833796113875144948422656000, 325847625506058417174757681861008490390777384317672718701340460331335184455500579793690624000, 1303390502024233668699030727444033961563109537270690874805361841325340737822002319174762496000, 5213562008096934674796122909776135846252438149082763507221447365301362951288009276699049984000, 20854248032387738699184491639104543385009752596331054028885789461205451805152037106796199936000, 83416992129550954796737966556418175540039010385324216115543157844821807220608148427184799744000, 333667968518203819186951866225672702160156041541296864462172631379287228882432593708739198976000, 1334671874072815276747807464902690808640624166165187457848690525517148915531730374834956795904000, 5338687496291261106991230859610763234562505664660750831394762102068595662126921499339827183616000, 21354750385165044427964923438443052938250022658643003325579048408274382648507685997359308734464000, 85419001540660177711859693753772211753000090634572013302316193633097530594030743989437234937728000, 341676006162640710847438775015088847012000362538288053209264774532390122376123055957748939750912000, 1366704024650562843389755100060355388048001450153152212837059098129560489504492223830995759003648000, 5466816098602251373559020400241421552192005800612608851348236392518241958017968895323983036014592000, 21867264394409005494236081600965686208768023202450435405392945570073055832071875581295932144058368000, 87469057577636021976944326403862744835072092809801741621571782280292223328287502325183728576233472000, 347876230310544087907777305615450979340288371239206966486287129121168893293150009300734914304933888000, 1391504921242176351631109222461803917361153484956827865945148516484675573172600037202939657219735552000, 5566019684968705406524436889847215709444613939827311463780594065938702292690400148811758628878942208000, 22264078739874821626097747559388862837778455759309245855122376263754809170761600595247034515515368832000, 89056314959503286504391090237555451351113823037236983420489505055019236683046402380988138062061475328000, 356225259838013146017564360950221805404455292148947933681958020220076946732185609523952552248245901312000, 1424901039352052584070257443800887221617821168595791735127952080880307786928742438095810208992983605248000, 5699604157408210336281029775203548886471284674383166940511808323521231147714969752383240835971934420992000, 22798416629632841345124119100814195545885138697532667762047233294084924589659879009532963343887697683968000, 91193666518531365380496476403256782183540554790130671048188933176339708358639516038131853375550750735936000, 364774666074125461521985905613027128734162219160522684192755732705358833434558064152527413502203002943744000, 1459102664296501846087943622452108514936648876642090736771022930821435333738232256650109654008812011774976000, 583641065718600738435177448980843405974659550656836294708409172328574133495292902660043861603524804709984000, 2334564262874402953740709795923373623898638202627345178833636689314296533981171610640175446414099218839936000, 9338257051497611814962839183693494495594552810509380715334546757257186135924686442560701785656396875359744000, 37353028205990447259851356734773977982378211242037522861338187029028744543708745770242807142625587501438976000, 149412112823961789039405426939095911929512844968150091445352748116114978174834983080971228570502350005755904000, 597648451295847156157621707756383647718051379872600365781410992464459912699339932323884914282009400023023616000, 2390593805183388624630486831025534590872205519490401463125643969857839650797359729295539657128037600092094464000, 95623752207335544985219473241021383634888

3

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 21. Найдите площадь поверхности шара.

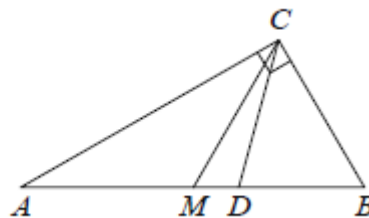


Такой результат выполнения этого задания, прежде всего, связан с тем, что в задании появились тела вращения. Здесь и само восприятие их учениками хуже, и формулы сложнее. Это задание выявило не только проблемы в изучении геометрии, они известны давно, но и проблемы как с владением выпускниками фактическим материалом (формулы), так и с умением его применять. Это означает, что изучению геометрии не уделяется должного внимания, причем на достаточном уровне изучаются более простые темы, доступные большинству школьников, и не происходит развитие их геометрических навыков с изучением более сложных тем.

В этот блок еще входили два задания:

1

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 70° . Найдите величину угла между биссектрисой CD и медианой CM , проведенными из вершины прямого угла C . Ответ дайте в градусах.



2

Даны векторы $\vec{a}(6; 4)$ и $\vec{b}(6; -8)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Так как для их решения требовался незначительный теоретический материал, то с ними благополучно справилось подавляющее большинство ребят.

Задания 4 и 5 относятся к такому разделу математики, как теория вероятностей. Причем задание 4 проверяет умения вычислять простейшие вероятности, а для решения задания 5 уже необходимо знание формул сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и др. Стоит также отметить, что для решения задания 5 уже необходимо знание алгоритмов решения таких заданий. Незначительный разброс ответов показывает, что часть ребят

старалась угадать метод решения этих задач, при этом навыки у таких ребят отсутствуют. Усложнение формулировки привело к тому, что часть выпускников не смогла найти решения, а разница в результатах выполнения заданий 4 и 5 составила больше 25%.

- 4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 9 из Швейцарии, 7 из Чехии, 8 из Словакии и 11 из Австрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Чехии.
- 5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Следующий блок заданий – задания, которые при решении сводятся к преобразованию выражений и проведению вычислений:

- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 125$.
- 7 Найдите значение выражения $\log_3 162 - \log_3 2$.
- 9 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 32\,000 \text{ км/ч}^2$. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 160 км/ч.

10

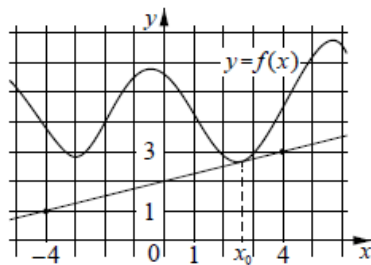
Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними равно 288 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 4 часа. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Причем до проведения преобразований и вычислений нужно воспользоваться методами решений отдельных видов заданий – уравнений и неравенств, текстовых задач, вычислений по формулам. Очевидно, что для решения части таких заданий требуется умение составлять и анализировать составленную математическую модель. Отметим, замена в 7 задании тригонометрических функций на логарифмические положительно сказалась на результате его выполнения. Это связано прежде всего с незнанием тригонометрических формул, их большим разнообразием, по сравнению с формулами для логарифмов. Это означает, что не на должном уровне сформированы навыки применения формул при решении заданий и проведении вычислений по ним. В качестве рекомендаций учителям можно посоветовать организовывать на уроках диктанты, направленные на проверку усвоения формул, а также основных методов решения заданий указанной линии. Как было показано выше незнание формул подводит и при решении геометрических задач. Очевидно, что потребуется время и на отработку навыков решения задач в соответствии с рабочими программами ФГОС.

Задание 8 базового уровня и задания 11 и 12 повышенного уровня сложности относятся к блоку «Функции».

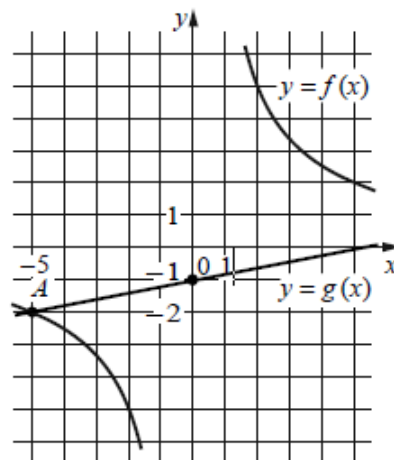
8

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



11

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



12

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 27x^2 + 17$.

Результаты выполнения этих заданий достаточно близки. Предложенные школьниками ответы показывают, что у выпускников недостаточно сформированы навыки чтения графиков, а также теоретические знания, позволяющие анализировать свойства функций. Поэтому стоит больше времени уделять качественным моментам, используемым при решении такого вида заданий, четкому усвоению алгоритмов решения, а также решению заданий на готовых чертежах.

Оставшиеся задания КИМ относятся ко второй части и требуют развернутого решения. Задания второй части проверяются экспертами в соответствии с выдаваемыми критериями.

Наиболее типичные ошибки при решении задания 13, с которым справилось в среднем 37,55% выпускников (97,09% в группе школьников, набравших от 81 до 100 баллов), – это неверное использование формул приведения, формулы косинуса двойного угла, ошибки в разложении получившегося выражения на множители, ошибки при решении получившихся тригонометрических уравнений. В пункте б) основной ошибкой являлся необоснованный отбор корней. Далее следуют вычислительные ошибки. По результатам выполнения этого задания видно, что с ним успешно справляются наиболее подготовленные выпускники.

13

а) Решите уравнение

$$2 - 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

5.13

$$a) 2 - 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\cos x$$

$$2 + 2\cos 2x + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$2 + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$2 + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$2 + 2\cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$2 + 2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$4\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x - 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{6} = 0$$

$$2\cos x(2\cos x + \sqrt{2}) - \sqrt{3}(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

$$(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2})(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$2\cos x + \sqrt{2} = 0$$

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos x = -\sqrt{2}$$

$$2\cos x = \sqrt{3}$$

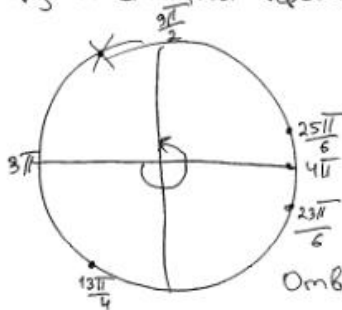
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Отберем корни с помощью тригонометрической окружности, на промежутке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$



$$4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

$$4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

$$3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

Ответ: а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$b) \frac{13\pi}{4}; \frac{23\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}$$

13.

$$a) 2 - 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\cos x$$

$$2 + 2\cos 2x + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$2 + 4\cos^2 x - 2 + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x = 0$$

$$\sqrt{8}\cos x + \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6}(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0$$

$$\sqrt{8}\cos x(\sqrt{2}\cos x + 1) - \sqrt{6}(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0$$

$$(\sqrt{2}\cos x + 1)(\sqrt{8}\cos x - \sqrt{6}) = 0$$

$$\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$$

$$\text{или } \sqrt{8}\cos x - \sqrt{6} = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi r, r \in \mathbb{Z}$$

б) отберем корни на числовой окружности на отрезке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

$$x_2 = 4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

$$x_3 = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

В задании 15 было необходимо решать смешанное неравенство дробно-рациональное с показательными функциями в числителе. Это привело некоторых выпускников в замешательство, в связи с чем с ним справилось только 23,08% выпускников и даже в группе получивших больше 80 баллов таких ребят только 89,24%, что ниже результатов 2024 года.

15 Решите неравенство $\frac{3 \cdot 27^x - 9^{x+1} + 3^{x+2} - 3}{50x^2 - 30x + 4,5} \geq 0$.

Основная ошибка при решении данного неравенства – неравносильные преобразования. Ребята не находят ограничения, при которых решают неравенство, ошибаются при использовании формул (а куб разности многие так и вовсе не знают), забывают вернуться к исходной переменной (если выбирают способ подстановки), неверно решают простейшие показательные уравнения или неверно проводят решение получившихся неравенств.

№15

$$\frac{27^{x+1} - 9^{x+2} + 3^{x+2} - 27}{50x^2 + 70x + 24,5} \leq 0$$

$$\frac{27(3^x - 3 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x - 1)}{5(10x^2 + 14x + 4,9)} \leq 0$$

$$\frac{27(3^x - 1)(3^x - 2 \cdot 3^x + 1)}{50(x^2 + 1,4x + 0,49)} \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{27(3^x - 1)^3}{50(x + 0,7)^2} \leq 0 \\ 50(x + 0,7)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$x \neq -0,7$$

$$ODZ \in (-\infty; -0,7) \cup (-0,7; +\infty)$$

Введем функцию

$$f(x) = \frac{27(3^x - 1)^3}{50(x + 0,7)^2}$$

найдем её нули

$$27(3^x - 1) = 0 \quad 50(x + 0,7)^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -0,7$$

	$(-\infty; -0,7)$	$\{-0,7\}$	$(-0,7; 0)$	$\{0\}$	$(0; +\infty)$
$27(3^x - 1)^3$	—	—	—	0	+
$50(x + 0,7)^2$	+	0	+	+	+
	—	0	—	0	+

С учетом ОДЗ $x \in (-\infty; -0,7) \cup (-0,7; 0]$

Ответ: $(-\infty; -0,7) \cup (-0,7; 0]$

15.

$$\frac{3 \cdot 2^{4x} - 9^{x+1} + 3^{x+2} - 3}{50x^2 - 30x + 4,5} \geq 0$$

$$50x^2 - 30x + 4,5 \neq 0$$

$$x \neq \frac{3}{10} \quad \frac{3 \cdot 2^{4x} - 9^{x+1} + 3^{x+2} - 3}{50x^2 - 30x + 4,5} \geq 0 \quad | \cdot 50x^2 - 30x + 4,5$$

Пусть $t = 3^x$, тогда $3t^3 - 9t^2 + 9t - 3 \geq 0$

группируем

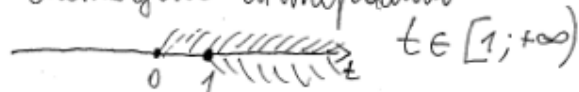
Используем метод группировки, получаем

$$3(t^3 - 1) - 9t(t - 1) \geq 0$$

$$t^3 \geq 1 \text{ или } t \geq 1 \text{ или } t \geq 0$$

$$t \geq 1$$

методом интервалов

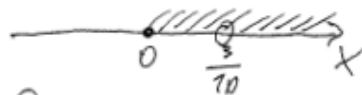


с учётом подстановки

$$(3^x)^3 \geq 1 \quad 3^x \geq 1 \quad 9 \cdot 3^x \geq 0$$

$$x \geq 0 \quad x \geq 0 \quad 3^x \geq 0$$

с учётом ограничения $x \neq \frac{3}{10}$:



Ответ: $x \in [0; \frac{3}{10}) \cup (\frac{3}{10}; +\infty)$

Экономическая задача в этом году оказалась с подвохом, связанным с единицами измерения величин, поэтому с ней справились хуже, чем в прошлом году. Средний процент выполнения – 17,24%, а процент выполнения задания математически грамотными выпускниками (набравшими от 81 до 100 баллов) – 86,32.

16

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2027 году составит 2508 тыс. рублей?

N 16.

Амтн руб - ? ; $Z = 5 \text{ лет} = 60 \text{ мес.}$

$n_{27} = 12 \text{ мес.}$, $p = 2$, $S = A \cdot 1000$

период	Долг	начисл. %	Вывод.	Остаток.
1-е	S	$S \cdot \frac{p}{100}$	x	$S - x$
2-е	$S \cdot k - x$	$S \cdot k^2 - x \cdot k$	x	$S \cdot k^2 - x \cdot k$
3-е	$S \cdot k^2 - x \cdot k$	$S \cdot k^3 - x \cdot k^2 - x \cdot k$	x	$S \cdot k^3 - x \cdot k^2 - x \cdot k$
...	...	...	x	...
декабрь 12-е			x	

$$S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{2} \dots = S_k$$

$S_{\text{вып. 2027}} = 2508 \text{ тыс.}$

$$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1,02$$

$$X = \frac{2508}{12} = 209 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_k = 12540 \text{ тыс. руб.}$$

$$= 2508 \cdot 5$$

$$S_k = \frac{S \cdot p \cdot x}{100 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow A = S =$$

$$= \frac{S_k \cdot 100 \cdot 2}{p \cdot x} =$$

период	Долг	начисл. %	Вывод.	Ост.
январь 27	S	$\frac{S \cdot p}{100}$	x	
февраль 27	$\frac{S \cdot p}{100} + x$	$\left(\frac{S \cdot p}{100} + x\right) \cdot \frac{p}{100}$	x	
...	...	...	x	
декабрь 27			x	

$$\frac{S_k \cdot 100 \cdot 2}{p \cdot x} = \frac{12540 \cdot 100 \cdot 2}{2 \cdot 209} = 6000 \text{ тыс.} = A$$

$$\frac{6000 \text{ тыс.}}{1000} = 6 \text{ млн. руб.}$$

Ответ: 6

N 16 A - изначальная сумма долга

каждый ~~год~~ ^{месяц} долг увеличивается на $\frac{A}{60}$

каждый месяц долг увеличивается на $1,02 \cdot \frac{A}{60}$

составим таблицу показывающую процесс выплаты
мес долг на конец ^{каждого} месяца ^{вспомог}

1	A	1,02A	$0,02A + \frac{A}{60}$ - январь 2027
2	$\frac{59}{60}A$	$\frac{59}{60}A \cdot 1,02$	$0,02 \cdot \frac{59}{60}A + \frac{A}{60}$ - февраль 2027
3	$\frac{58}{60}A$	$\frac{58}{60}A \cdot 1,02$	$0,02 \cdot \frac{58}{60}A + \frac{A}{60}$ - март 2027
... еще несколько месяцев ...			
12	$\frac{49}{60}A$	$\frac{49}{60}A \cdot 1,02$	$0,02 \cdot \frac{49}{60}A + \frac{A}{60}$ - декабрь 2027

13... 60 - пока не интерес ^{сумма выплат за 2027}

найдем сумму: $\frac{A}{60} \cdot 12 + \frac{0,02A \cdot \frac{60}{60} + 0,02A \cdot \frac{59}{60} + \dots + 0,02A \cdot \frac{49}{60}}$

$\frac{A}{5} + 0,02A \cdot 12 \cdot \left(\frac{60 + 49}{60} \right) =$ это арифметическая прогрессия, когда
3-ий член которой, увеличился
от $\frac{60}{60}$ до $\frac{49}{60}$ на $\frac{1}{60}$

$$= \frac{A}{5} + 0,02A \cdot \frac{12 \cdot 60}{2} = 0,42A + 0,218A = 0,418A = 2508 \text{ руб} =$$

$$A = \frac{2508}{0,418} = 6 \text{ млн рублей} \quad \approx 2,508 \text{ млн руб}$$

Ответ: A = 6 млн рублей

3.1.3. Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Требования ФГОС СОО включают обязательное достижение учащимися не только предметных, но и метапредметных результатов. В основе сформированных метапредметных результатов находится освоение межпредметных понятий и универсальных учебных действий (познавательных, коммуникативных, регулятивных).

В соответствии с перечнем метапредметных результатов, приведенных в таблице 1 Кодификатора проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике (далее Кодификатор), а также указанных связей метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы из таблицы 2 Кодификатора, на успешность выполнения заданий в большей степени влияет способность обучающихся использовать на практике следующие универсальные учебные действия:

- умение применять базовые логические действия, базовые исследовательские действия, работать с информацией (познавательные универсальные учебные действия);
- сформированность социальных навыков общения (коммуникативные универсальные учебные действия);
- самоорганизация, самоконтроль, развитие эмоционального интеллекта (регулятивные универсальные учебные действия).

Анализ успешности выполнения заданий группами обучающихся, позволяет выявить перечень универсальных учебных действий недостаточный уровень сформированности которых повлиял на успешность выполнения заданий.

1. Познавательные универсальные учебные действия

1.1. Сформированность базовых логических действий.

К базовым логическим действиям, связанным в основном с решением жизненных ситуаций, относятся умения выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий; делать выводы с использованием законов логики.

Недостаточная сформированность этих умений привела к тому, что только с одним из заданий базового уровня сложности справились ребята на 100%, в группе получивших свыше 81 балла. Так, проблемы возникли при решении

заданий 3, 5 и 8, в которых к несформированности метапредметных навыков добавилась несформированность пространственного мышления, умения работать со случайными величинами, различать графики функций и их производных, т. е. предметных компетенций. Говоря о метапредметных результатах обучения, прежде всего стоит отметить плохо сформированный навык смыслового чтения. Зачастую задача решается неверно не из-за нехватки знаний по математике, а именно из-за неумения верно прочесть и понять условие. Поэтому в 2025 году несформированность метапредметных результатов повлияла на решение задач с «длинными» и «заковыристыми» условиями – 9, 16 и 19.

1.2. Сформированность базовых исследовательских действий

Умение применять базовые логические действия тесно связано с умением применять и базовые исследовательские действия, отвечающие за получение нового знания, его интерпретацию, преобразование и применение в различных учебных и жизненных ситуациях. Умение переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности, умение интегрировать знания из разных предметных областей, владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления также накладывает отпечаток на выполнение заданий КИМ. Так, недостаточная сформированность такого рода умений, привела к снижению результативности в выполнении заданий базового уровня. Также это оказало несомненное влияние на успешность выполнения заданий второй части с развернутым ответом.

Конечно, для решения наиболее сложных задач варианта требовалась сформированность и таких умений, как умение выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения. Школьники должны быть способны и готовы к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания, выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения.

Недостаточная сформированность указанных умений привела к тому, что самые сложные задания 14-19 не смогли выполнить на достаточно высоком уровне даже выпускники, получившие свыше 81 балла. Для решения этих заданий школьники должны уметь соотносить содержание задач с теми знаниями и навыками, которыми они обладают, чтобы самостоятельно найти метод решения, скомбинировать известные методы, выстраивая цепочки аналогий и

взаимосвязей. Недостаточная сформированность умения комбинировать методы решения, не подменяя один из них другим, причем без обоснованности решения с использованием каждого из них, сказалась на результатах выполнения заданий 18 и 19. Определенное влияние отсутствие этого умения оказало и на решение других заданий повышенного и высокого уровня сложности. Например, 8, 10, 11, 14 и 17. При этом стоит отметить, что достаточно алгоритмизированный способ решения задания 13 второй части позволил обучающимся показать неплохой процент его выполнения, даже при недостаточной сформированности указанных выше умений.

2. Коммуникативные универсальные учебные действия.

Недостаточная сформированность коммуникативных УУД приводит к снижению результативности выполнения геометрических задач и задач второй части с развернутым ответом, так как на их решение очень сильное влияние оказывает умение ясно и логично излагать последовательность решения, а его недостаточная сформированность приводит к ошибкам в применении тех или иных способов решения. Кроме того, нарушается связь между реальным опытом обучающихся и представлением его в виде математической модели. Здесь хочется отметить в целом недостаточно сформированную геометрическую культуру школьников и отсутствие пространственного мышления. Причем это сказалось даже при решении геометрических задач базового уровня сложности, не говоря уже о заданиях 14 и 17, которые имеют сопоставимый результат выполнения с заданиями 18 и 19. Умение доказательно проводить рассуждения очень необходимо и при проведении обоснования решения заданий 18 и 19. Особенно в этом году это умение требовалось в задании 19, где само решение было интуитивно понятно, особенно сильным ученикам, а вот провести логичное и полностью обоснованное решение удалось немногим. Пропуск нескольких логических моментов, которые должны обосновать переход к более простым уравнениям подвел ребят и при решении задания 18.

3. Регулятивные универсальные учебные действия (самоорганизация, самоконтроль).

И, конечно, на получение желаемых результатов экзамена оказывают большое влияние регулятивные УУД: самоорганизация, самоконтроль и эмоциональный интеллект. Данные учебные действия позволяют ребятам организовать собственный образовательный процесс наиболее эффективно и с целью как овладения предметом, так и подготовки к экзамену. Кроме того, они помогают правильно организовать работу и на самом экзамене. Недостаточная сформированность этих умений привела к тому, что ряд обучающихся не достиг желаемых результатов.

Рассмотрим сказанное выше на примере заданий, оказавшихся самыми сложными.

Задания 14 и 17.

Основные проблемы с решением этих заданий возникают из-за недостаточного уровня читательской грамотности обучающихся, нехватки графической культуры для наглядного представления условия задачи, недостаточной сформированности абстрактного и пространственного мышления, неумения логически выстраивать последовательность шагов решения, с параллельной доказательностью их переходов.

При выполнении этих заданий сказался недостаточный уровень сформированности следующих **познавательных УУД**:

- умение устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;
- выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях;
- умение выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений;
- умение задавать параметры и критерии решения; уметь интегрировать знания из разных предметных областей - способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач;
- умение выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения (оба этих задания из второй части КИМ, поэтому именно эти умения они и проверяют);
- владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления

Коммуникативные УУД: аргументированно вести диалог – в плане четкого построения алгоритма решения с обоснованием каждого шага и **регулятивных УУД**: самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; давать оценку новым ситуациям, давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям (все это очень актуально при освоении программы и подготовке к экзаменам – самоорганизация и самоконтроль оказывают существенную роль на качество подготовки, конечно, не стоит забыть и про мотивацию).

Типичные ошибки:

- не могут устанавливать нужные взаимосвязи при использовании теорем,

- многие шаги выполнены при решении необоснованно,
- допускают ошибки при построении чертежей;
- неверно трактуют условия задания,
- недостаточно владеют фактами о фигурах и телах в заданных условиях.

Указанные выше типичные ошибки безусловно являются не только результатом недостаточных предметных знаний, но и, в большей степени, именно недостаточных метапредметных умений, которые позволяют соединить теорию с практикой выполнения заданий.

Задание 18.

Основные проблемы с решением этого задания возникают в основном из-за отсутствия готовности выпускников переводить свои знания и практические навыки на более высокий абстрактный уровень, а также из-за невозможности правильно выстроить логику решения и установить равносильность переходов. В частности, в 18 задании этого года переход к исследованию более простых элементов был обоснован очень маленьким количеством выпускников.

Задание 19.

Несмотря на то, что задание 19 имеет принципиально другой содержательный компонент, проблемы с его выполнением оказались в 2025 году такими же, как и с выполнением задания 18. Выпускникам хватало знаний, но не хватило умения логически и обоснованно выстроить свои решения, даже для пункта а), в котором в этом году требовалось провести обоснование, чего не было в ближайшие предыдущие годы.

При выполнении этих заданий сказался недостаточный уровень сформированности следующих **познавательных УУД**:

- устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;
- выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях -развивать креативное мышление, выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений;
- задавать параметры и критерии решения; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения;

– владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления.

Коммуникативные УУД: аргументированно вести диалог – в плане четкого построения алгоритма решения с обоснованием каждого шага и **регулятивных УУД:** самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; давать оценку новым ситуациям, давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям.

Типичные ошибки:

- ошибаются при установлении взаимосвязей между указанными в задании фактами;
- многие шаги выполняют при решении необоснованно;
- неверно осуществляют равносильные переходы как в решении уравнений, так и в проведении рассуждений.

В принципе, метапредметные умения необходимы в целом для освоения образовательной программы и подготовки к экзамену. Они являются регулятором систематизации полученных предметных знаний, умений и навыков и дают возможность повышать качество подготовки по предмету.

Безусловно, результаты экзамена – это совокупное влияние сформированности как предметных, так и метапредметных навыков, поэтому формирование одних, невозможно без формирования других. Следовательно, образовательный процесс должен быть направлен на развитие каждого из них и на их совокупность.

3.1.4. Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

○ *Перечень элементов содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом можно считать достаточным*

В целом можно считать достаточным усвоение всеми школьниками Липецкой области следующих элементов содержания / умений и видов деятельности, для которых средний процент выполнения превышает 75 %

- уметь выполнять вычисления и преобразования (задание 7, 10);
- уметь решать уравнения и неравенства (задание 6);
- уметь выполнять действия с функциями (задания 8, 11 и 12);
- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (задания 1, 2);
- уметь строить и исследовать простейшие математические модели (4, 9).

При этом часть из указанных заданий проверяют также умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

○ *Перечень элементов содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом, школьниками с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным*

- уметь строить и исследовать математические модели (более сложное задание по теории вероятности - 5);
- уметь выполнять действия с более сложными геометрическими фигурами (задание 3).

Отметим еще раз, что в целом задания первой части, включая все задания базового и повышенного уровня сложности решены на очень хорошем уровне. Поэтому в целом по региону школьники освоили образовательные программы на достаточно высоком уровне.

Школьники со слабым уровнем подготовки оказались не готовыми к выполнению задний базового уровня, проверяющих умения работать с геометрическими объектами (3), вычислять вероятность (5), выполнять преобразования и вычисления (7), работать с функциями и их графиками (8). Очевидно, несформированными оказались все умения, относящиеся к решению заданий повышенного и высокого уровня сложности.

Несформированными оказались умения находить вероятность сложных событий (5) и работать с отдельными стереометрическими объектами (3).

Только во второй части работы присутствуют элементы содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками Липецкой области в целом, школьниками с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным – это стереометрическая и планиметрическая задачи повышенного уровня сложности (задания 14 и 17); показательное неравенство (задание 15); экономическая задача (задание 16), задача с параметром (задание 18) и задача на умение строить и исследовать усложненные математические модели (задание 19).

○ *Выводы об изменении успешности выполнения заданий разных лет по одной теме / проверяемому умению, виду деятельности (если это возможно сделать)*

Сравнение результатов выполнения каждого из заданий приведено в следующей таблице.

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	2025 средний, %	2024 средний, %
1	Умение оперировать понятиями: плоский угол, площадь фигуры, подобные фигуры; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	Б	83,03	83,53
2	Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами	Б	96,35	88,05
3	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, величина угла, плоский угол, двугранный угол, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, объем фигуры, площадь поверхности; умение использовать геометрические отношения при решении задач; умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	Б	63,59	77,19
4	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность	Б	97,35	89,23

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	2025 средний, %	2024 средний, %
5	Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы	П	71,35	84,37
6	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	Б	93,7	97,39
7	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений	Б	88,37	65,14
8	Умение оперировать понятиями: функция, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, производная функции, первообразная; находить уравнение касательной к графику функции; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций; находить площади фигур с помощью интеграла	Б	81,48	67,16
9	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	83,03	70,06
10	Умение решать текстовые задачи разных типов, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов	П	78,97	77,83
11	Умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений	П	78,7	89,09
12	Умение оперировать понятиями: экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение находить производные элементарных функций; умение использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций	П	81,75	75,66
13	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	37,45	52,65

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	2025 средний, %	2024 средний, %
14	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объем фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	П	5,54	3,24
15	Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов	П	23,08	34,17
16	Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; умение решать текстовые задачи разных типов, в том числе задачи из области управления личными и семейными финансами	П	17,24	29,3
17	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	П	4,09	6,56
18	Умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	В	1,02	3,24

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	2025 средний, %	2024 средний, %
19	Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное; умение выбирать подходящий метод для решения задачи	П	0,54	7,08

Желтым выделены задания, процент выполнения которых существенно снизился по сравнению с 2024 годом, а зеленым – повысился. Причины снижения результатов выполнения заданий 3, 5, 15, 16 рассмотрены выше. Что касается задания 11, то изменение самой функции, а также наглядное отсутствие точки В на чертеже и сыграли свою роль. Это свидетельствует о том, что навыки применения знаний в новой ситуации и выбор метода решения сформированы недостаточно.

Более сложная структура задания 13, приведшая к необходимости производить более сложные вычисления и преобразования, также привела к снижению результата его выполнения.

Собственно говоря, в 2025 году выпускники хуже справились с заданиями второй части (исключение составляет задание 14 с незначительным улучшением результата 2024 года), что в основном объясняется усложнением заданий второй части. Но тем не менее, очевидно, такие результаты не исчерпываются только сложностью заданий. Безусловно на их решение влияют имеющиеся у выпускников знания и навыки, причем как предметные и межпредметные, так и метапредметные.

В основном результаты ЕГЭ зависели от систематичности освоения выпускниками образовательной программы на протяжении всех лет обучения.

○ *Выводы о связи динамики результатов проведения ЕГЭ с использованием рекомендаций для системы образования Липецкой области и системы мероприятий, включенных в статистико-аналитические отчеты о результатах ЕГЭ по учебному предмету в предыдущие 2-3 года.*

Результаты проведения ЕГЭ по профильной математике за последние годы в целом стабильны. В 2025 году достаточно успешно (успешнее, чем в предыдущие годы) выпускники справились с заданиями первой части. Задания второй части в этом году оказались сложнее, поэтому и результаты различны. Безусловно, указанная динамика тесно связана с успешно проведенными мероприятиями, предложенными для включения в дорожную карту в 2024 году. Это такие мероприятия, организованные ГАУДПО ЛО «ИРО» как: семинар-совещание «Анализ итогов ГИА по математике 9 и 11 классов образовательных организации Липецкой области. Проблемы, пути решения, перспективное планирование», видеоконференция «Результаты и перспективы ГИА по математике в Липецкой области», КПК «Технология работы со школьниками 9 и 11 классов по освоению образовательной программы в рамках ФГОС», КПК «Технология работы со школьниками по устранению пробелов в освоении образовательных программ НОО, ООО и СОО, выявленных по результатам ЕГЭ 2024», практикум «Организация дифференцированного подхода в обучении», вебинар «Методика работы с обучающимися, имеющими риск академической неуспеваемости по математике», цикл семинаров «Формирование метапредметных умений на уроках математики», индивидуальные консультации, направленные на помощь педагогам, испытывающим профессиональные дефициты, в выстраивании индивидуальной образовательной траектории, дальнейшее сопровождение в рамках КПК; практикум «Решение задач высоко уровня сложности», организованный совместно с ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского», семинар «Углубленное изучение математики. Подходы, решения, результат» из опыта работы педагогов профильных классов, обучающиеся которых показывают стабильно высокие результаты МБОУ «Гимназия №1» г. Липецка, вебинары по организации изучения отдельных тем образовательных программ, которые стабильно вызывают затруднения у обучающихся, организованные ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского». Подключение к работе с молодыми учителями ОО региона, показавших высокие результаты.

В регионе проводилось большое количество курсов повышения квалификации для учителей (в очном и дистанционном форматах), направленных на подробное изучение возможных проблем в освоении школьниками

программ математических дисциплин в соответствии с ФГОС, на их устранение и предупреждение в процессе обучения. Большое внимание уделялось проработке основных ошибок, которые допускают обучающиеся на ОГЭ и затем на ЕГЭ с целью более тщательного изучения этих тем при реализации программы и при организации повторения пройденного материала. Особенностью работы с учителями в этом учебном году стала проработка каждой из линий, например, решение уравнений и неравенств, решение текстовых задач, решение практико-ориентированных задач, задач на теорию вероятности, геометрических задач. Причем основной целью было построение такой траектории реализации программы, начиная с основной школы, которая бы позволила устранять все пробелы и предотвращать возникновение дефицитов у обучающихся 10-11 классов, таких как – плохие вычислительные навыки, отсутствие целостного восприятия окружающей действительности в плане оперирования ее моделями, несформированность абстрактного мышления, недостаточная читательская, математическая и естественнонаучная грамотность обучающихся.

Но, как показал анализ результатов ЕГЭ 2025 г., у обучающихся по-прежнему слабо сформированы именно метапредметные умения, от которых зависит успешность выполнения заданий, также выпускники демонстрируют недостаточный уровень функциональной грамотности, поэтому считаем целесообразным усилить методическую работу с педагогами по данному направлению.

Раздел 4. РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ

4.1.Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания математики в Липецкой области на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

4.1.1. ...по совершенствованию преподавания учебного предмета всем обучающимся

1. При изучении предмета «Математика» изучать предмет в соответствии с программами основного общего и среднего общего образования, а не готовить школьников к сдаче ЕГЭ, натаскивая на определенные типы заданий, при разделении учебных предметов на три предмета реализовывать программы в тесной взаимосвязи, с четким указанием на использование различных методов во всех предметах и на особенные методы каждого предмета.

2. При планировании уроков учитывать результаты ЕГЭ по базовой математике предыдущих лет, выделять время для повторения и закрепления особенно сложных тем. Обращать внимание на изучение тематических линий, начиная с 5 класса. Закладывать время на решение творческих задач и задач повышенного уровня сложности.

3. Развивать навыки смыслового чтения, самоконтроля деятельности по анализу условия задачи, решению задачи и найденного ответа в задаче. Повышать уровень функциональной грамотности обучающихся, привлекая их к решению математическими методами заданий из различных областей знаний.

4. На уроках геометрии организовать изучение теоретического материала и систематический контроль его усвоения, использовать задачи на готовых чертежах, в том числе из банка заданий ФИПИ. Использовать возможности компьютерных программ и искусственного интеллекта, но именно для иллюстрации задачи, а не для ее решения.

5. Проводить регулярные тренинги решения примеров на вычисления, предварительно выявив существующие пробелы. Для сокращения времени на уроках использовать доступные цифровые платформы, предварительно мотивировав учащихся на честное прохождение тестов.

6. Создавать условия для самостоятельной работы школьников на уроке и дома. Обеспечивать дифференцированный подход к обучающимся, контролируя усвоение математики на базовом уровне всеми учениками.

7. При прохождении материала обращать внимание на типовые ошибки при решении заданий, акцентировать внимание на самоконтроль решения.

8. Организовать мониторинг качества освоения образовательных программ – включать в текущий и рубежный контроль задания по изученным темам из банка ФИПИ, предварительно повторив и систематизировав материал.

9. При включении в уроки задач из открытого банка заданий ФИПИ обращать внимание на материал, который привлекается к решению того или иного задания, а не просто решать задания, организовать параллельно повторение всего пройденного материала, на примерах показывая, где и какой материал применяется в дальнейшем.

10. По возможности рассматривать различные методы решения одной и той же задачи, показывать в какой ситуации лучше применять тот или иной метод.

11. Мотивировать школьников изучать математику, сделать обучение интересным, использовать современные информационные технологии и различные дистанционные платформы, в том числе и с целью устранения пробелов в освоении программы и организации дифференцированного обучения.

12. Особое внимание уделять методикам формирования метапредметных умений, включать в урочную деятельность задания комплексного характера.

13. Использовать ресурсы РЭШ, которые направлены на формирование метапредметных умений: регулятивных (самостоятельно определять цели, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности; оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной ранее цели; задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута; сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью; фиксировать и оценивать в конце урока результаты своей работы на уроке); познавательных (осуществлять информационный поиск на основе предложенных материалов; искать и находить обобщенные способы решения задач; осуществлять моделирование; приводить критические аргументы).

ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей рекомендуется:

1. Организовать курсы повышения квалификации учителей по предложенным ниже темам, в том числе для учителей школ с низкими образовательными результатами.

2. Организовать поддержку молодых учителей, учителей, имеющих небольшой стаж или вернувшихся к педагогической деятельности после длительного перерыва.

3. Организовать взаимодействие с педагогами посредством различных цифровых платформ, с целью обеспечения предметной и методической поддержки учителей региона, и, особенно, отдаленных районов области.

4. Усилить взаимодействие с вузами региона, ведущими подготовку учителей.

5. Продолжить проведение конференций, семинаров-практикумов, например, в рамках заседаний ГПС и УМО учителей математики, ассоциации учителей математики с участием председателя предметной комиссии, ведущего и старших экспертов.

4.1.2. ...по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

Учителям при организации дифференцированного подхода к освоению образовательных программ по математике базового уровня рекомендуется:

- 1) определить дефициты в знаниях обучающихся, после чего разделить на группы по уровню подготовки;
- 2) для каждой из получившихся групп сформировать траекторию изучения математики, в том числе индивидуальную траекторию для каждого ученика внутри группы;
- 3) определить уровень заданий, которые должны освоить все обучающиеся и которые можно предлагать более способным и подготовленным ученикам;
- 4) дифференцировать задания на уроке и дома, при выполнении проверочных, контрольных, диагностических работ, индивидуальных практических работ;
- 5) организовать индивидуальную работу на доступных цифровых платформах с целью отработки необходимых каждому обучающемуся навыков, предварительно убедив в необходимости самостоятельного выполнения заданий (для некоторых, например, путем проверки усвоения заданий с помощью маленькой проверочной работы в рамках урока)

Для ребят с *низкой подготовкой* важно улучшить качество вычислительной культуры, регулярно предлагать задания на вычисления, подбирать задания, выполняемые по алгоритму, практико-ориентированные задания, которые

можно выполнять в том числе и с учетом своего опыта. При создании условия для подготовки школьника к ЕГЭ определить круг заданий, которые школьник обязательно должен выполнить, определить задания, к которым школьник может приступить. Важно показать ученикам с низкой подготовкой, что работа с условием задачи (например, подчеркивание важных слов, выделение, графическая иллюстрация), пошаговая запись решения заданий, необходима и поможет усилить самоконтроль и снизить вероятность ошибки. Важно также показать слабым ученикам горизонт их дальнейшего и постепенного развития по наращиванию сложности решаемых заданий.

Для ребят с *достаточным и высоким* уровнями подготовки рекомендуем использовать дополнительные карточки с заданиями повышенного уровня, в том числе и из банка задач ФИПИ базовой и профильной математики. Особое внимание стоит уделить основательной проработке теоретического материала, самоконтролю всех этапов решения, умению свободно оперировать известными фактами и усвоенными знаниями для решения задач. В этой группе ребят стоит активно обращать внимание на сформированность метапредметных умений, давать им задания на повышение ее уровня, причем задачи должны быть из различных областей знаний, для более показательной значимости математических знаний и умений.

Для решения задач повышенного уровня сложности недостаточно урочной работы, только дополнительные занятия с привлеченными специалистами в кружках, на профильных сменах смогут помочь некоторым из одаренных учеников решить эти задачи. Так как такие ребята, как правило, достаточно мотивированы, то следует оказать им помощь в организации самостоятельного изучения интересующих их разделов математики, подсказав необходимые источники информации.

Для успешного выполнения обучающимися заданий и помощи в организации самоконтроля также рекомендуем учителям организовывать на уроке и дома обращение учеников к следующим индивидуально созданным материалам: тетрадь моих ошибок, интеллект-карты по разделам геометрии, опорные конспекты, карточки с формулами. Для усиления индивидуализации образовательного процесса использовать созданные цифровые платформы с соответствующим контентом.

Администрациям образовательных организаций рекомендуется:

– содействовать методической поддержке учителей по проблемам преподавания математики школьникам с различным уровнем подготовки;

- усилить внутришкольный контроль освоения образовательной программы с учетом результатов прошедшего ЕГЭ, особенно в части выявленных типичных ошибок;
 - организовать технические условия для использования современных цифровых инструментов;
 - содействовать участию высокомотивированных детей в предметных олимпиадах разного уровня, научно-практических конференциях, профильных сменах Центра поддержки одаренных детей Липецкой области «Стратегия».
- ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей* рекомендуем:
- разработать методические материалы для учителей региона по организации дифференцированного обучения на основе результатов оценочных процедур в системе общего образования;
 - организовать курсы повышения квалификации учителей по предложенным ниже темам, с учетом дифференциации обучения;
 - организовать адресную помощь педагогам, испытывающим профессиональные дефициты по организации и применению дифференцированного обучения;
 - организовать наставническую деятельность через сетевое взаимодействие школ с высокими и низкими образовательными результатами.

4.2. Рекомендуемые темы для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников, в том числе по трансляции эффективных педагогических практик ОО с наиболее высокими результатами

В регионе традиционно проходит обсуждение итогов ЕГЭ на заседаниях ГПС и РМО учителей математики, ассоциации учителей математики, выступают председатель предметной комиссии, ведущий и старшие эксперты. Для проведения методических семинаров-практикумов предлагаем рассмотреть следующие темы:

- Модель КИМ ЕГЭ по математике: 2026 (базовый и профильный уровни). Анализ ошибок ЕГЭ 2025.
- Формирование функциональной, особенно читательской, естественнонаучной и математической грамотности обучающихся с целью повышения результативности выполнения заданий по математике.

- Методика и технологии организации повторения на уроках математики с целью устранения пробелов в освоении образовательных программ ООО и СОО (на основе анализа типовых ошибок при решении задач ЕГЭ базового уровня).
- Методика обучения решению геометрических задач образовательной программы для обучающихся с различным уровнем подготовки в основной и средней школе.
- Функции. Их графики и свойства.
- Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств.
- Текстовые задачи и исследование простейших математических моделей.
- Методика обучения решению задач повышенной сложности, в том числе и из открытого банка ФИПИ.
- Методика преподавания линии «Уравнения» в освоении образовательной программы ООО и СОО.
- Методика преподавания линии «Неравенства» в освоении образовательной программы ООО и СОО.
- Методика обучения решению заданий с параметрами.
- Методика обучения решению олимпиадных задач школьного курса математики углубленного уровня.
- Методика повышения уровня сформированности метапредметных умений для школьников с различным уровнем подготовки.

4.3 Рекомендуемые направления повышения квалификации работников образования

Проведение регулярного мониторинга затруднений учителей и оказание адресной методической помощи. Индивидуальные консультации для учителей математики, которые испытывают затруднения при подготовке обучающихся к ЕГЭ как очно, так и дистанционно.

Рекомендуется в программу курсов повышения квалификации включить модули, которые позволят педагогу выстроить индивидуальную образовательную траекторию, направленную на ликвидацию профессиональных дефицитов («Функции. Их графики и свойства»; «Решение уравнений и неравенств в курсе алгебры и математического анализа на базовом и углубленном уровнях»; «Задания по теории вероятностей в школьном курсе базового и углубленного уровнях»; «Методика обучения решению геометрических задач базового и продвинутого уровней сложности»; «Преподавание математики в классах с различным профилем»; «Приемы развития функциональной грамотности на уроках»; «Методические особенности организации повторения на уроках математики с целью

формирования и закрепления вычислительных навыков обучающихся»; «Методика обучения решению алгебраических задач повышенного уровня сложности»; «Методика обучения решению геометрических задач повышенного уровня сложности»; «Методически грамотное использование ресурсов Открытого банка заданий ФИПИ и РЭШ и других цифровых платформ»; «Методические рекомендации по формированию метапредметных умений на уроках математики», «Использование цифровых инструментов на уроках математики», «Использование искусственного интеллекта для визуализации графических и геометрических способов решения задач»).

4.3.Рекомендации по другим направлениям

Организация централизованных вебинаров для школьников региона по сложным темам программы СОО с привлечением ведущих учителей, методистов, педагогов.

Мониторинг и удовлетворение запросов обучающихся на реализацию программ с углубленным изучением отдельных предметов как в школах, так и в организациях дополнительного образования.